BOSSUT

ELEMENTI D' ALGEBRA E GEOMETRIA.

ELEMENTI
D'ALGEBRA E GEOMETRIA

DEL SIGNOR

CARLO BOSSUT.

NUOVAMENTE TRADOTTI CON AGGIUNTE

DA

FRANCESCO CARDINALI

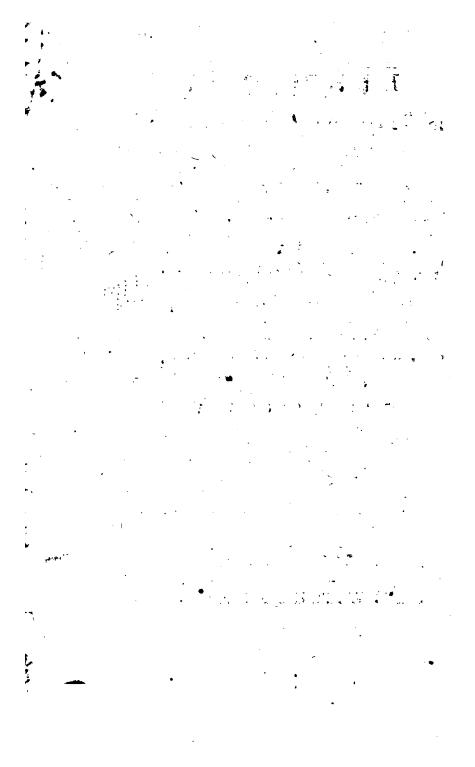
Professore di Matematica Elementare

NEL R. LICEO DI TREVISO

Edizione fatta sull' ultima pubblicata dall' Autore in Francia.

PARTE SECONDA.

BOLOGNA 1809.

Pei Fratelli Masi e Compagno.

INDICE

Delle cose contenute nella seconda Parte.

Elementi di Geometria Piana e solida.

ELEMENTI DI GEOMETRIA

Definizioni e Nozioni preliminari.

1. La Geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell'estensione.

2. Si distinguono tre specie d'estensione: la *linea*, la *superficie*, ed il *solido* o il *corpo*. La linea è un'estensione soltanto in lunghezza; la superficie è un'estensione in lunghezza e larghezza; il solido è un'estensione in lunghezza, larghezza, e profondità.

L' estremità d'una linea si chiama *punto*: si può considerare il punto come una linea, la cui lunghezza è divenuta zero; similmente si può considerare la linea come una superficie, la cui larghezza è svanita: e la superficie come un solido, la cui profondità è svanita.

3. La linea e la superficie non possono esistere per se stesse ed indipendentemente dal solido: esse vi sono sempre annesse. La superficie è come

la coperta esteriore o una porzione della coperta esteriore del solido: e la linea è come l'estremità o una porzione dell'estremità della superficie. Ma è sempre lecito, ed è qualche volta necessario di separare col pensiero, la linea e la superficie del solido, e d'immaginare che la linea o la superficie esista sola. Di fatti, se voglio per esempio, conoscere la distanza da Parigi a Lione, è chiaro che devo considerare semplicemente la lunghezza del cammino, che conduce da una città all'altra, senza pensare alla larghezza di questo cammino nè alla profondità del terreno, sopra il quale è stabilito. Se voglio misurare l'estensione del pavimento della mia camera, devo considerarne la lunghezza e la larghezza, e non mi devo punto occupare intorno al solido coperto da questo pavimento. Ma se mi si domanda la capacità d'un vaso, per sapere quanti boccali d'acqua può contenere, bisogna che io abbia riguardo nel medesimo tempo alle tre dimensioni del vaso, lunghezza, larghezza, e profondità.

4. Vi sono in generale due sorti di

linee: la linea *retta* e la linea *curva*:

La linea retta è quella A B (Fig. 1.) che va da un punto A ad un altro B, senza piegare da alcuna parte; ella può essere considerata come prodotta dal moto del punto A che cammina da A verso B, seguendo sempre la medesima direzione.

Una linea A C B, composta di due linee rette A C, C B, che formano un angolo in C, si chiama *linea spezzata*,

La linea A D B, che devia a ciascun passo dalla direzione rettilinea, si chiama *linea curva* o semplicemente *una curva*.

5. La linea retta esprime la distanza o il più *breve* cammino da un punto A ad un altro B. Questo cammino più breve è necessariamente *unico*; di modo, che dal punto A al punto B non si può condurre che una sola linea retta, o volendosene condurre molte, esse si confonderanno tutte in una sola e medesima linea. Ma dal punto A al punto B si può condurre un' infinità di linee spezzate A C B o di curve A D B. Tutte queste linee sono più lunghe della retta A B.

6. Si chiama *piano* o superficie *piana*, una superficie sopra la quale si possono tirare delle linee rette per ogni verso: tale è la parte superiore d' una tavola ben levigata, o d' un foglio di carta ben teso. Ogni superficie che non ha questa proprietà, si chiama in generale *superficie curva*.

7. Le linee rette si tirano sulla carta, facendo scorrere, lungo una riga ben diritta, una penna o un lapis, che si lascia dietro una striscia d' inchiostro, di ematita o di miniera di piombo, ec. Sopra il terreno si piantano di distanza in distanza delle paline nella dirittura d' un medesimo raggio visuale; e da una palina all' altra si disegnano de' solchi, che si uniscono capo a capo l' uno all' altro, e formano così una linea retta continua.

Tutte le linee, quelle eziandio che si tirano sopra la carta, hanno della larghezza, perchè la punta d' una penna o d' un lapis, ha sempre una certa superficie, e perchè altronde egli è necessario che le linee appariscano sensibili a' nostri occhi. Ma si deve prescindere dalla loro larghezza, e non

considerare che la lunghezza.

8 Due linee BA, CA (Fig. 2, 3, 4) che s' incontrano in un punto *A*, formano un' apertura BAC, che si chiama un angolo. Quest' angolo è *rettilineo* (Fig. 2), quando i suoi *lati* o *gambe* BA, CA sono linee rette; è *curvilineo* (Fig. 3), quando i suoi lati sono linee curve; ed è *mistilineo* (Fig 4), quando un lato è una linea retta, e l' altro lato una linea curva.

Si deve badar bene che un angolo non è già lo spazio compreso fra i suoi lati, ma unicamente l' inclinazione che hanno i suoi lati, l' uno per rispetto all' altro, nella loro intersezione A. Quindi la grandezza d' un angolo non dipende punto dalla lunghezza de' suoi lati; di modo che, se si prolungano, per esempio, i lati BA, CA dell' angolo rettilineo BAC (Fig 2) verso D ed *E*, questi lati benchè divenuti più lunghi, conserveranno sempre l' uno per riguardo all' altro, la medesima situazione o inclinazione, o sia formeranno sempre il medesimo angolo. Lo stesso s' intenda per gli angoli curvilinei e mistilinei. Imperciocchè, per e-

sempio, l'angolo curvilineo BAC (Fig. 3), è la medesima cosa dell' angolo rettilineo MAN formato dalle rette MA, NA che toccano le curve AB, AC nel vertice A, e che hanno per conseguenza le medesime direzioni di queste curve alla loro origine; esso dunque rimane sempre costante, qualunque sia la lunghezza de' suoi lati BA, CA.

Un angolo s' indica d' ordinario con tre lettere, delle quali quella di mezzo corrisponde al *vertice* o alla punta dell' angolo; ma qualche volta non si adopra che la semplice lettera del vertice.

Avverto poi che le figure di cui parlerò, saranno supposte delineate sopra un medesimo piano; i casi d' eccezione saranno formalmente enunziati.

9. Quando due linee rette CE, DB (Fig 5) si tagliano, esse formano l' una rispetto all' altra, degli angoli che si appellano *angoli conseguenti*. Così, essendo il punto A l' intersezione di queste due linee, CAB, CAD sono angoli conseguenti.

10. Se (Fig. 6) la retta CE cade *perpendicolarmente*, o sia senza incli-

nare da alcuna parte, sopra DB; ovvero, ciò che torna allo stesso, se i due angoli conseguenti CAB, CAD sono eguali, ciascuno di essi chiamasi *angolo retto*.

11. Si chiama *angolo acuto* quello che è minore dell' angolo retto; ed *angolo ottuso* quello che è maggiore dell' angolo retto. Così nella Figura 5, CAB è un angolo acuto, CAD è un angolo ottuso.

12. Ogni superficie limitata nella sua estensione, è terminata da linee che la circondano e la circoscrivono. Queste linee che si chiamano i *lati* della figura, possono essere rette o curve, o in parte rette ed in parte curve. Nel primo caso, la figura chiamasi *figura rettilinea* o *poligono rettilineo*; nel secondo, figura o poligono *curvilineo*; nel terzo, figura o poligono *mistilineo*.

La misura de' poligoni rettilinei è uno degli oggetti della Geometria elementare; tra i poligoni curvilinei, il *cerchio* che definiremo fra poco, è il solo di cui ella consideri le proprietà.

13. I poligoni rettilinei hanno differenti nomi secondo il numero de' loro

lati. Si chiama *triangolo* quello che ne ha tre; *quadrilatero*, quello che ne ha quattro; *pentagono*, quello che ne ha cinque; *esagono*, quello che ne ha sei; *eptagono*, quello che ne ha sette; *ottagono*, quello che ne ha otto, ec.

14. Si distinguono sei specie di triangoli: tre per rapporto ai lati, e tre per rapporto agli angoli.

1.° Per rapporto ai lati, chiamasi *triangolo equilatero* quello ABC (Fig 7), che ha i suoi tre lati AB, BC, CA, eguali fra loro; triangolo *isoscele*, quello ABC (Fig. 8), che ha solo due lati AB, AC, eguali; triangolo *scaleno*, quello ABC (Fig. 9), che ha i suoi tre lati disuguali.

2.° Per rapporto agli angoli, si chiama triangolo *rettangolo* quello ABC (Fig 10) che ha un angolo retto B: triangolo *ottusangolo*, quello ABC (Fig. 11) che ha un angolo ottuso B; triangolo *acutangolo*, quello ABC (Fig. 12.) che ha i suoi tre angoli acuti.

15. Nel triangolo rettangolo ABC (Fig. 10) i lati BA, BC che comprendono l'angolo retto B, ritengono il sem-

plice nome di lati; ma quello AC che è opposto all' angolo retto B, dicesi *ipotenusa*.

16. Si chiama in generale *base* d' un triangolo, il lato BC sopra il quale s' immagina che esso si appoggi. La stessa denominazione ha luogo in tutte le figure, ed in tutti i solidi, pel lato o faccia che è come l' appoggio della figura o del solido.

La punta di ciascun angolo d' un triangolo può esserne considerata come il vertice per rapporto al lato opposto. Nel triangolo isoscele (Fig. 8), si da più particolarmente il nome di *base* al lato BC che non ha eguale; ed il nome di *vertice* alla punta dell' angolo che è compreso fra i lati uguali.

17. Un poligono ABCDEF (Fig. 13) d' un numero qualunque di lati, che ha tutti i suoi lati eguali, e tutti i suoi angoli eguali, dicesi *regolare*. Le altre specie di poligoni sono *irregolari*.

18 Una retta AD, condotta da un angolo d' un poligono ad un altro angolo, si chiama comunemente *diagonale*. Questa denominazione è principalmente usitata nel quadrilatero.

19. Il *cerchio* è una figura terminata da una linea curva ABOD (Fig. 14) che chiamasi *circonferenza*, tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto interno C che dicesi *centro*.

Il cerchio si può considerare come prodotto dal moto d'una retta CA che si rivolge intorno all'estremità C, e che porta ad una distanza sempre costante dal centro C, un ago fisso in A, che descrive la circonferenza ABOD. A norma di questa nozione, si descrive il cerchio sulla carta, per mezzo dell'istromento detto *compasso*. Per descrivere la circonferenza d'un circolo sul terreno, in vece del compasso, si fa uso d'una corda ben tesa, attaccata con uno de' suoi capi ad una palina fissa, e *guernita* all' altro capo, d'una palina che gira sul terreno, e vi segna la circonferenza.

20. Si chiama *raggio* ogni retta CA guidata dal centro alla circonferenza, e *diametro* ogni retta DB che passa pel centro, e termina dall' una e dall' altra parte alla circonferenza Si scorge immediatamente dalla generazione del cerchio, che tutti i raggi sono e-

guali. Tutti i diametri sono pure eguali, poichè ciascuno di essi è la somma di due raggi.

21. Una retta MN che termina da una parte e dall'altra alla circonferenza, senza passare pel centro, chiamasi *corda*; le porzioni di circonferenza MON, MAN, che corrispondono alla corda MN, si chiamano *archi*.

22. I corpi o i solidi che esistono in natura, hanno delle forme che possono variare all'infinito, in ragione della figura, delle dimensioni e del numero delle faccie onde sono terminati. Ma tutti i solidi de' quali si occupa la Geometria elementare, si riducono a tre, che sono il *Prisma*, la *Piramide*, e la *Sfera*. Noi rimettiamo, per evitare qui ogni oscurità, le definizioni di questi solidi ai luoghi ove tratteremo specialmente delle loro misure.

23. Dividerò questo trattato in tre parti. La prima avrà per oggetto le *linee*; la seconda le *superficie*; e la terza i *solidi*.

PARTE PRIMA

Delle linee.

24. Tutte le relazioni che delle linee ponno avere fra di loro, consistono o nel rapporto di grandezza di queste linee, o nella posizione ch' esse hanno in riguardo ad altre linee, o al circolo Lo sviluppo di queste relazioni e delle conseguenze o proprietà particolari che ne risultano, è l' oggetto di questa prima parte.

CAPITOLO I.

Confronto e grandezza delle linee.

25. Si misurano e si paragonano insieme le lunghezze delle linee, col mezzo d' una misura comune, che forma l' unità principale, e che essendo posta successivamente sopra tutte le linee fa conoscere i ragguagli di lunghezza. Per esempio, volendosi misurare la distanza di due Campanili A e B (Fig. 15) situati in un piano: si

prenderà per unità una certa misura; come sarebbe il metro; e portando successivamente questa misura sopra tutta la lunghezza della retta AB, che si suppone congiungere i due campanili; questa linea sarà composta di tanti metri, quante volte sarà stato necessario ripetere l' unità di metro, per giungere da un estremo all' altro della stessa linea. Se questo numero di volte è 458, si concluderà che i due campanili sono distanti l' uno dall' altro di 458 metri.

Può accadere che il metro non sia contenuto un numero esatto di volte nell' intervallo AB; allora l' ultima divisione è una frazione di metro.

26. Le linee misurate sopra il terreno sono ordinariamente troppo lunghe per poter essere riportate sopra la carta nella loro grandezza naturale; si è dunque obbligato di ridurle, e di esprimerle mediante altre linee più piccole; a questo fine si giunge mediante la costruzione della scala dei rapporti. Questa scala è una linea EF che si disegna sopra la carta, per rappresentare l' unità o un certo multiplo dell' unità che ha servito per misura sopra il ter-

reno; deve pertanto essere piccolissima, perchè ripetendola tante volte quanto è necessario per formare le linee che si ha bisogno di rappresentare o di riportare sopra la carta, possono essere le linee di rappresentazione comprese in un foglio di carta sopra del quale deve essere eseguito tutto il disegno.

La scala EF essendo stabilita una volta, si subdivide in più parti eguali per rappresentare le misure più piccole. Per esempio, se EF rappresenta un intervallo di 100 metri, si dividerà questa linea in dieci parti eguali Ff, fg, gh, ec. per rappresentare dei *palmi;* e se si volesse subdividere nuovamente, si dividerà una delle parti Ff in dieci parti eguali, o solamente in quattro parti eguali, o in cinque parti eguali, ec.; con ciò s' otterranno delle parti della scala per rappresentare sopra la carta le parti delle linee misurate sopra il terreno.

In quanto alle lunghezze maggiori dell' unità, per restringere il loro disegno sopra la carta, si comincia a formare col mezzo della scala EF, altre scale più grandi, per esempio, doppie,

triple, quadruple, ec., delle quali si fa lo stesso uso che si fa della scala fondamentale. Se la distanza che si vuole rappresentare per mezzo della scala ausiliaria non contiene un giusto numero di volte la lunghezza che si vuole rappresentare, si suplisce al difetto, o all' eccesso, mediante la scala EF e le sue parti.

CAPITOLO II.

Proprietà dell' incontro scambievole di due linee rette.

27. *La somma di due angoli conseguenti vale sempre due angoli retti.*

Se fosse (Fig. 16) EC perpendicolare ad AB, certo che ne risulterebbero di quà, e di là gli angoli retti, ma se è inclinata, si tiri dal medesimo punto C la perpendicolare CD alla data AB, dunque gli angoli ACD, BCD saranno due retti; ma si adattano a questi due retti gli altri due ACE, BCE dunque ancora questi due angoli uguagliano la somma di due retti.

28. Quando due linee AC, CF (Fig. 17) non formano una linea retta, o pure formano una linea spezzata in C, la somma dei due angoli ECA, ECF, che hanno i loro vertici al punto C, e il lato comune EC, vale meno o più di due angoli retti; perchè prolungando AC verso B, la somma dei due angoli ACE, ECB, equivale a due angoli retti, e perciò la somma dei due angoli ACE, ECF vale meno o più di due angoli retti, perchè CF non cade sopra di CB.

29. Se ad un medesimo punto C, e da una stessa parte della retta AB (Fig. 18) si condurrà un numero qualunque di rette GC, EC, FC, la somma di tutti gli angoli ACG, GCE, ECF, FCB equivalerà a due angoli retti; ciò è chiaro per la proposizione 27.

30. *Segandosi fra di loro due rette* AB, CD (Fig. 19) *nel punto* E, *gli angoli opposti al vertice*, AEC, BED *saranno eguali*.

Perchè sopra la AB stando la CE, farà gli angoli AEC, CEB eguali a due retti, e così ancora la BE sopra la CD fa gli angoli BED, CEB eguali a due retti, e però eguali alli due AEC, CEB;

dunque tolto di comune CEB, resta l'angolo AEC eguale a BED. Similmente si proverà essere l'angolo CEB eguale al suo contrapposto DEA, facendo pure ciascheduno di questi coll'angolo BED, due angoli eguali a due retti; dunque le rette che si segano, fanno gli angoli opposti al vertice eguali.

31. Da ciò può comprendersi che tutti gli angoli fatti intorno al punto del segamento da due o più linee rette, sono eguali a quattro retti.

32. Dunque se la retta CD (Fig. 20) è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare ad AD; perchè CD essendo perpendicolare ad AB, si ha BEC eguale all'angolo AEC: ma abbiamo veduto precedentemente, che l'angolo BED è eguale al suo opposto AEC; dunque BEC sarà eguale all'angolo BED, e perciò AB è perpendicolare a CD.

33. *Se quattro angoli* AEC, AED, DEB, BEC (Fig. 20) *formati da due linee che si segano in un punto* E, *e tali che* AEC = DEB, *e* AED = BEC; *dico che le due linee* AB, CD *saranno linee rette.*

Poichè avendosi AEC = DEB, e AED = BEC; sommando queste due equazioni come segue si avrà

$$AEC + AED = DEB + BEC$$
$$AEC + BEC = DEB + AED$$

ma la somma dei quattro angoli proposti equivale a quattro retti (3); dunque la metà AEC + AED, o pure AEC + BEC equivale a due retti. Dal primo di questi due valori si ricava (28) che CD è una linea retta, e dal secondo si rileva che AB è pure una linea retta.

34 *Supponendosi che la perpendicolare* CD (Fig 21) *divida per metà in* E *la retta* AB; *qualunque punto* F *posto sopra la* CD, *sarà egualmente lontano dall' estremità* A *e* B *della retta* AB.

S' immagini che la parte CEA della figura rimanga immobile, nel mentre che la parte CEB, si gira intorno CD ad uso di cerniera. L' angolo CEB essendo eguale all' angolo CEA, e la retta EB essendo eguale ad EA; è chiaro che dopo una mezza rivoluzione EB sarà sovraposta ad EA, il punto B sopra il punto A, e la retta FB sopra la retta FA. Dunque FB = FA, e perciò il

punto F sarà egualmente lontano dai punti A e B.

35. Dunque due rette oblique FA, FB, che s'allontanano egualmente dalla retta CD, perpendicolare ad un' altra linea AB, sono eguali. Le distanze di cui si tratta sono misurate dalle rette eguali EA, EB.

Reciprocamente le distanze EA, EB dalla perpendicolare sono eguali, quando le due oblique FA, FB che partono dal medesimo punto F della perpendicolare sono eguali; perchè le due figure FEA, FEB essendo applicate l'una sopra dell' altra si confonderanno perfettamente.

36. *La retta* CD (Fig. 22) *essendo sempre supposta perpendicolare sopra la metà di* AB, *qualunque punto* G *che non è posto sopra questa perpendicolare non è egualmente lontano dai punti* A, *e* B.

Dal punto G condotte ai punti A e B le rette GA, GB; e dal punto F dove GA taglia CD condotta al punto B la retta FB: si avrà (34) FA = FB. Aggiungendo da una parte e dall' altra FG, si avrà FA + FG, cioè GA =

FB + FG. Ma FB + FG > GB; dunque GA > GB, e perciò il punto G è più lontano da A che da B.

37. Problema I. *Condurre una linea che sia perpendicolare sopra il mezzo d' una retta data* AB (Fig. 23)?

Dai punti A, e B, col medesimo raggio arbitrario, ma maggiore della metà di AB, descrivete due archi di cerchio MO, PQ che si taglino in F; dai medesimi punti descrivete col medesimo raggio, due altri archi di cerchio che si taglino in *f*; guidate pei punti F ed *f* la retta CD: ella sarà perpendicolare sopra il mezzo di AB; poichè ciascuno dei due punti F ed *f* essendo equidistante dai punti A e B, è situato nella perpendicolare sopra il mezzo di AB.

Lo stesso metodo serve a dividere una linea retta in due parti eguali.

38. Problema II. *Da un punto dato* E *sopra la linea* KH (Fig. 24) *innalzare una perpendicolare a questa linea?*

Dal punto E, come centro, con un raggio arbitrario, descrivete la semicirconferenza AZB, che seghi KH (prolungata se fa bisogno) nei punti A e B,

e che dia EB = EA. In seguito dai punti A e B, con un raggio arbitrario, ma maggiore di EB o di EA, descrivete due archi di cerchio MO, PQ che si taglino in F; tirate pei punti F ed E, la retta CD: ella sarà perpendicolare ad AB.

39. Problema III. *Da un punto* F *situato fuori d' una linea* KH (Fig. 25), *abbassare una perpendicolare a questa linea?*

Dal punto F, come centro, descrivete l' arco AZB, che seghi nei punti qualunque A e B la retta KH, prolungata, quanto è necessario; da questi due punti come centri, con altro raggio, descrivete due archi di cerchio *mo*, *pq* che si taglino in *f*; tirate pei punti F ed *f*, la retta CD: essa sarà perpendicolare ad AB o sia a KH.

40. *Se da un punto* D *posto dentro un triangolo* ACB (Fig. 26), *conducansi le rette* DA, DB: *la somma di queste due linee sarà minore della somma dei lati* CA, CB.

Prolungate AD sino in E: avrete, 1.° BD < EB + ED. Aggiungendo dall' una e dall' altra parte DA, verrà

$BD + DA < EB + EA$. 2.° Avrete $EA < CA + CE$. Aggiungendo da ambe le parti EB, verrà $EB + EA < CA + CB$. Dunque a maggior ragione, $BD + DA < AC + CB$.

41. *Fra tutte le linee che si possono condurre da un punto qualunque* F (Fig. 27) *ad una retta* KH, *la più breve é la perpendicolare* FE; *e delle due oblique* FA, FK, *che si scostano inegualmente dalla perpendicolare, la più breve è quella* FA *che se ne scosta meno.*

Prolungate FE della quantità $ED = EF$; tirate le rette AD, KD. In seguito considerate che le rette FD, KH essendo perpendicolari l' una all' altra, ciascuno dei punti di KH sarà egualmente distante dai punti F e D. Dunque $AD = AF$, e $KD = KF$. Ma $FD < FA + AD$: e per l'articolo precedente, $FA + AD < FK + KD$. Dunque prendendo la metà, si avrà $FE < FA$, ed $FA < FK$. Laonde si vede, 1.° che la perpendicolare FE è più breve di ciascuna delle obblique FA, FK, 2.° che di queste oblique la più breve è quella FA che si scosta meno dalla perpendicolare FE.

42. Da un medesimo punto F non si può condurre che una sola perpendicolare ad una retta KH; poichè non vi è che una sola linea che sia la più breve di tutte quelle che si possono condurre dal punto F alla retta KH. Questa perpendicolare esprime la distanza del punto F dalla retta KH.

43. Se dal punto F si guidano alla retta KH due oblique FA, FH, le quali si scostino egualmente dalla perpendicolare, cioè a dire tali che sia EH = EA: queste due oblique saranno eguali. Ma non si può condurre dal punto F a KH una terza linea eguale ad FA o ad FH; perciocchè bisognerebbe che ella cadesse dalla medesima parte di una delle due oblique proposte: ed ella sarebbe più o meno lunga di questa obliqua, poichè si scosterebbe più o meno dalla perpendicolare.

CAPITOLO III.

Caratteri della perfetta eguaglianza di due figure, stabiliti sopra la grandezza e la posizione delle linee che terminano le figure stesse.

44. S' intende per *perfetta eguaglianza*, o pure *eguaglianza completa* di due figure, un' eguaglianza totale di dimensioni, cioè di lati, di angoli e di superficie; mentre l' eguaglianza *incompleta* è quando le due figure sono in parte solamente eguali, come sarebbe in superficie, e non in angoli o lati.

45. *Due triangoli qualunque* A B C, D E F (Fig. 28, e 29) *sono eguali in tutto o* (come si dice) *sono perfettamente uguali, quando hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; cioè, quando per esempio, l' angolo* D *è uguale all' angolo* A, *il lato* D E *eguale al lato* A B, *ed il lato* D F *eguale al lato* A C.

Collocate il vertice D sopra il vertice A, il lato DE sopra il lato AB.

Essendo DE = AB, il punto E cadrà sopra il punto B: ed essendo l'angolo D eguale all'angolo A, il lato DF avrà la stessa direzione di AC; finalmente, per essere DF eguale ad AC, il punto F cadrà sopra il punto C, e le linee EF, BC si copriranno esattamente l'una l'altra. Dunque, anche i nostri due triangoli si cuoprono perfettamente l'un l'altro, e sono per conseguenza in tutto eguali.

È da notarsi, che nei due triangoli di cui trattasi, gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali. Lo stesso avviene in tutti i casi di due triangoli perfettamente uguali. Gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali; e reciprocamente. Questa osservazione è essenziale, ed avrà delle frequenti applicazioni nel seguito.

46. *Due triangoli qualunque* ABC, DEF *sono perfettamente uguali, quando hanno un lato eguale adjacente a due angoli uguali; cioè, se* EF = BC, *ed angolo* E = *angolo* B, *angolo* F = *angolo* C.

Collocate il lato EF sopra il lato BC, il punto E sul punto B, e per

conseguenza il punto F sopra il punto C. Essendo eguali gli angoli E e B, avrà ED la medesima direzione di BA; e gli angoli F e C essendo eguali, FD avrà la medesima direzione di CA. Laonde si vede che i due triangoli coincideranno esattamente l'uno coll'altro, e saranno in tutto eguali.

47. *Due triangoli qualunque* ABC, DEF *sono perfettamente eguali, quando hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, cioè a dire, se* EF = BC, ED = BA, FD = CA.

Il vertice (Fig. 30, e 31) A del triangolo ABC può essere considerato come l'intersezione di due archi di cerchio, descritti dai punti B e C, come centri, coi raggi BA, CA; così pure il vertice D del triangolo DEF può essere considerato come l'intersezione di due archi di cerchio descritti dai punti E ed F, come centri, coi raggi ED, FD. Si sovrapponga il lato EF al lato BC: egli è chiaro che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali BA, ED, si confonderanno, e che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali CA, FD, si confon-

deranno. Dunque i due punti d'intersezione A e D non ne formeranno che un solo; ed il triangolo DEF coinciderà esattamente col triangolo ABC; dunque questi due triangoli sono perfettamente eguali.

48. *I due triangoli* ABC, DEF (Fig. 32, e 33) *saranno perfettamente eguali se* DE = AB, DF = AC, *ang.* E = *ang.* B, *e di più i due angoli* F *e* C *sieno della stessa specie, cioè tutti due acuti, o tutti due ottusi, o tutti due retti.*

Sovrapposto il lato DE sopra il lato AB, in modo che il punto E si confonda con il punto B, il punto D con il punto A, per essere DE = AB; anche EF avrà la stessa direzione di BC, per essere gli angoli E e B eguali. Il punto F potendo essere riguardato come l'intersezione di EF con un arco di cerchio descritto dal punto D come centro, e dal raggio DF; se dal punto D confuso con A e con il raggio AC o DF, si descrive l'arco di cerchio CK, che taglia BC in un secondo punto K, e che si conduca AK; il triangolo DEF non potrà es-

sere che il triangolo ABC, o il triangolo ABK. Ma questa seconda supposizione non può essere vera generalmente, perchè il triangolo ACK essendo isoscele, e l'angolo F essendo della stessa specie dell'angolo C, come anche l'angolo AKC; l'angolo F non può essere l'angolo AKB, a meno che DF e AC non fossero perpendicolari ad EF e BC, per il qual caso i punti C e K si confonderebbero. Dunque in generale il triangolo DEF si confonde con il triangolo ABC, e perciò questi due triangoli sono perfettamente eguali.

49. Da ciò si ricava, 1.° che due triangoli rettangoli che hanno ipotenuse eguali, ed un angolo acuto eguale, sono perfettamente eguali. Tali sono (Fig 32, 33), calando dagli angoli A e D le perpendicolari AO, DH sopra i lati opposti, i due triangoli rettangoli AOB, DHE, che hanno le ipotenuse AB, DE eguali, gli angoli B ed E eguali, ed i due angoli retti AOB, DHE, della stessa specie. 2.° Se si considera il triangolo KAC (Fig. 32), si vedrà che in queste qualità di triangoli e nei triangoli equilateri, la perpendicolare

AO abbassata dall' angolo A sopra la base, divide il triangolo in due triangoli rettangoli, e sovrapposto l' uno all' altro, coincideranno perfettamente.

50. Due poligoni qualunque composti d' un medesimo numero di triangoli di quelli considerati precedentemente, e similmente disposti, sono perfettamente eguali.

Perchè sovrapposti questi due poligoni l' uno sopra l' altro, è chiaro che si potranno far coincidere le parti, e che perciò i tutti coincideranno similmente.

CAPITOLO IV.

Delle linee parallele.

51. Rette parallele ovvero equidistanti si dicon quelle che prolungate indefinitamente conservan sempre fra loro la medesima distanza.

52. Distanza è la perpendicolare calata da una delle parallele all' altra. Così (Fig. 34) CD è la distanza; AB, EF le parallele.

53. *La retta* EF (Fig. 35) *essendo supposta parallela alla retta* AB, *se da un punto qualunque* C, *preso sopra* AB, *s' innalzi a questa linea la perpendicolare* CD, *che incontri* EF *in* D: *questa linea* CD *sarà altresì perpendicolare ad* EF.

Prendete arbitrariamente dall' una e dall' altra parte del punto C, le rette eguali CK, CG; dai punti K, G alzate sopra AB le perpendicolari KL, GH; e tirate le diagonali CL, GH. Essendo la linea EF parallela ad AB, si avrà KL = GH. Dunque i due triangoli rettangoli CKL, CGH sono perfettamente eguali; poichè CK = CG, KL = GH, ed angolo K = angolo G. Quindi l'angolo KCL = all'angolo GCH, CL = CH. Sottraendo gli angoli KCL, GCH da gli angoli retti eguali KCD, GCD, resterà l'angolo LCD = all'angolo HCD; dunque i due triangoli CDL, CDH sono perfettamente eguali, siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. Dunque i due angoli conseguenti CDL, CDH sono eguali; e per conseguenza ciascuno di essi è retto, o sia ciò che

torna allo stesso, CD è perpendicolare ad E F.

54. Dunque la linea EF (Fig. 34) essendo supposta parallela ad AB, si può dire altresì che AB è reciprocamente parallela ad EF; poichè le linee eguali CD, CD, CD, CD, riguardate come perpendicolari ad AB, sono reciprocamente perpendicolari ad EF.

55. Dunque due rette parallele AB, EF sono da per tutto equidistanti l' una dall' altra, siccome perpendicolari in ciascuno de' loro punti ad una serie di linee rette eguali CD, CD, CD, CD, che esprimono ciascuna la distanza del punto D dalla retta AB; ovvero la distanza del punto C dalla retta EF.

56. Di qui ne segue il modo di condurre (Fig. 36) da un punto D, dato o preso ad arbitrio, una parallela alla retta AB. Dal punto D abbassate la retta DC perpendicolare ad AB; e da questo stesso punto innalzate DF perpendicolare a DC: questa retta DF sarà parallela ad AB.

57. Se avendo condotte le perpendicolari CD, MN alle due parallele AB, EF, si prendano da una stessa parte le

porzioni CR, MO, eguali fra loro, e si conducano le oblique RD, ON: queste oblique saranno eguali, e le parti RO, DN delle linee AB, EF, saranno eziandio eguali. Imperciocchè, 1.° i due triangoli rettangoli DCR, NMO sono perfettamente eguali, siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. 2.° Se si tira la retta DM, i due triangoli DCM, DNM, che hanno la medesima ipotenusa, ed il lato DC = NM, sono perfettamente eguali; donde risulta CM = DN. 3.° Levando OM da CM, ed aggiugnendo CR che è uguale ad OM, si avrà RO = CM = DN.

58. *Se le rette parallele* AB, EF (Fig. 37) *sono tagliate da una retta* KL: *gli angoli* HDB, EHD (che si chiamano *angoli alterni interni*) *saranno eguali*.

Imperciocchè, se dai punti H e D si conducano alle due parallele le perpendicolari HO, DG, i due triangoli rettangoli HOD, DGH, che hanno la medesima ipotenusa ed i lati HO, DG eguali, sono perfettamente eguali; dunque l'angolo HDO = all'angolo DHG.

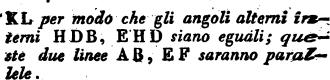
59. Di qui ne segue, 1.° che gli angoli HDB, KHF (che si chiamano *Angoli interno e esterno dalla stessa parte*) sono eguali; poichè l'angolo KHF è uguale al suo opposto al vertice EHD, che si è dimostrato eguale ad HDB.

2.° Che gli angoli KHF, ADL (che chiamansi *Angoli alterni esterni*) sono eguali; poichè sono opposti verticalmente ad angoli eguali.

3.° Che gli angoli *alterni interni* FHD, ADH sono eguali, siccome supplementi di angoli eguali. Per la stessa ragione, gli angoli *alterni esterni* KHE; BDL sono eguali.

4.° Che la somma dei due angoli FHD, BDH (che chiamansi *Angoli interni dalla stessa parte*) vale due angoli retti; poichè la somma dei due angoli conseguenti FHK, FHD vale due angoli retti, e l'angolo FHK è uguale all'angolo HDB. Per una simile ragione, la somma dei due angoli *esterni dalla stessa parte*, FHK, BDL, vale due angoli retti.

60. *Reciprocamente, se due rette* AB, EF (Fig. 38) *sono tagliate da una retta*

KL *per modo che gli angoli alterni interni* HDB, EHD *siano eguali; queste due linee* AB, EF *saranno parallele*.

Imperciocchè, se si pretende che EF non sia parallela ad AB, condurrò pel punto H, la retta *ef* parallela ad AB: allora pel teorema precedente, l' angolo *e*HD sarà uguale all' angolo HDB; dunque l' angolo *e*HD sarà eguale all' angolo EHD; il che non può, a meno che *ef* non cada sopra EF, ovvero che EF non sia parallela ad AB.

61. Le due linee AB, EF sono eziandio parallele, 1.° se gli angoli HDB, KHF sono eguali; perciocchè l' angolo KHF essendo eguale all' angolo EHD, i due angoli EHD, HDB saranno eguali.

2.° Se gli angoli KHF, ADL sono eguali; perciocchè allora gli angoli EHD, HDB, che loro sono opposti al vertice, saranno eguali.

3.° Se gli angoli FHD, ADH sono eguali, ovvero se gli angoli KHE, BDL sono eguali; perciocchè da amendue queste supposizioni risulta l' angolo EHD = all' angolo HDB.

4.° Se la somma dei due angoli FHD, BDH; ovvero se la somma dei due angoli FHK, BDL, vale due angoli retti; perciocchè si troverà facilmente che in conseguenza dell' una o dell' altra supposizione, gli angoli EHD, HDB saranno eguali.

CAPITOLO V.

Valore degli angoli d' un triangolo, e d' un poligono; dipendenza generale e scambievole degli angoli e dei lati in un medesimo triangolo, o in due triangoli in parti eguali; ec.

62. *La somma dei tre angoli d' un triangolo qualunque* ABC (Fig. 39) *vale sempre due angoli retti.*

Guidate da uno degli angoli A, la retta MN parallela al lato opposto BC: gli angoli alterni interni ABC, BAM saranno eguali; e medesimamente gli angoli ACB, CAN saranno eguali. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo BAC vale la somma dei tre angoli BAM, BAC, CAN; ora la

somma di questi tre ultimi angoli vale due angoli retti; dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo vale due angoli retti.

63. Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a maggior ragione che un solo angolo ottuso. Ma può avere i suoi tre angoli acuti.

64. Se la somma di due angoli d'un triangolo è eguale alla somma di due angoli d'un altro triangolo, il terzo angolo del primo triangolo sarà uguale al terzo angolo del secondo. Imperciocchè sottraendo le due somme proposte, ciascuna dai due angoli retti, i due angoli rimanenti saranno necessariamente uguali.

Quindi per concludere che due triangoli hanno tutti i loro angoli eguali, ciascuno a ciascuno basterà di conoscere che due angoli di uno di questi triangoli sono eguali ciascuno a ciascuno alli due angoli dell' altro triangolo.

65. Se si prolunga uno dei lati B C d'un triangolo B A C l'angolo A C D (che chiamasi *angolo esterno*) sarà eguale alla somma dei due angoli C B A, C A B (che si chiamano *angoli interni*

opposti). Imperciocchè la somma dei due angoli A C D, A C B, e la somma dei tre angoli C B A, C A B, A C B, sono eguali tra loro, come aventi per valore comune due angoli retti; dunque sottraendo da queste due somme l'angolo A C B, resterà l'angolo A C D eguale alla somma dei due angoli C B A, C A B.

66. Da un punto M situato sopra uno dei lati A C d'un triangolo B A C (Fig. 40), si tiri all'estremità del lato B C la retta M B, l'angolo B M C sarà più grande dell angolo B A M; perchè l'angolo B M C essendo esterno al triangolo B A M, equivale la somma dei due angoli B A M, A B M, e perciò sorpassa l'angolo B A M di A B M.

67. *La somma degli angoli interni d'un poligono qualunque equivale sempre a tante volte due angoli retti, quanti lati ha il poligono, meno quattro angoli retti.*

1° Sia (Fig. 41) un poligono qualunque A B C D E F i di cui angoli sieno saglienti: condotte da uno degli angoli A le diagonali A C, A D, A E, si formeranno tanti triangoli meno due,

quanti lati ha il poligono. Ma la somma degli angoli interni del poligono, equivale la somma di tutti gli angoli dei triangoli: dunque equivale tante volte due angoli retti, meno quattro angoli retti, quanti lati ha il poligono; poichè la somma dei tre angoli di ciascun triangolo in particolare vale due angoli retti.

2.° Quando il poligono ha degli angoli rientranti, come sarebbe C (Fig. 42), bisogna condurre la retta BD, ed allora nel nuovo poligono ABDEF, di cui tutti gli angoli sono saglienti, e che ha un lato di meno del primo ABCDEF, la somma degli angoli interni $= (n-1) \times 2D - 4D$, chiamando n il numero dei lati del poligono proposto, D il valore dell' angolo retto. Ora preso per l' angolo interno C di questo stesso poligono, la somma dei due angoli ACB, ACD, si vedrà che per avere la somma di tutti gli angoli interni, bisognerà aggiungere all' espressione $(n-1) \times 2D - 4D$, la somma dei due angoli ACB, ACD, e sottrarne la somma dei due angoli *CBD*, CDB; e siccome prolungata AC fino

in I, si ha *ang.* ACB = *ang.* CBD + *ang.* CKB, e *ang.* ACD = *ang.* CDB + *ang.* CKD, si avrà *ang.* ACB + *ang.* ACD — *ang.* CBD — *ang.* CDB = *ang.* CKB + *ang.* CKD = 2D. Dunque la somma degli angoli interni del poligono proposto ABCDEF = $(n-1) \times 2D - 4D + 2D = n \times 2D - 4D$, espressione che è conforme all' enunciato della proposizione generale.

Se il poligono avesse due angoli rientranti, si formerebbe successivamente due poligoni saglienti; se tre angoli rientranti, tre poligoni saglienti, e così di seguito; e si troverebbe che sempre ha luogo la proposizione enunciata.

68. Dalle cose dette si può concludere:

1.° Che la somma dei tre angoli d'un triangolo equivale due angoli retti.

2.° Che la somma di tutti gli angoli interni d'un quadrilatero, vale 4 angoli retti.

3.° Che la somma di tutti gli angoli interni d'un pentagono, vale 6 angoli retti.

4.° Che la somma di tutti gli angoli

interni d'un esagono, vale 8 ango
retti.

5.° Che la somma di tutti gli ango
interni di un eptagono, vale 10 an
goli retti.

Così di seguito. Tutte queste somm
d'angoli osservano la legge della progre
sione aritmetica ÷ 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14
ec., di cui il primo termine e la dif
ferenza è 2.

69. La somma degli angoli estern
BAM, CBN, DCO, ec. d' un poli
gono che non abbia angoli rientrant
(Fig. 41), equivale sempre quattro an
goli retti; perchè ciascun angolo ester
no con il suo interno vale due angol
retti; e siccome la somma di tutti gli
angoli interni, vale tante volte due an-
goli retti, meno quattro angoli retti,
quanti lati ha il poligono, è chiaro che
la somma degli angoli esterni equivale
sempre quattro angoli retti.

In quanto ai poligoni che hanno de-
gli angoli rientranti, la somma degli
angoli esterni, equivale sempre quattro
angoli retti più tante volte due angoli
retti quanti angoli rientranti ha il po-
ligono. Di fatti, condotta la retta BDH

(Fig. 44), apparisce che la somma degli angoli esterni BAM, DBN, EDH, ec. del poligono ABDEF di cui tutti gli angoli sono saglienti, equivale quattro angoli retti. Ma per avere la somma degli angoli esterni del poligono proposto ABCDEF, che ha un angolo rientrante, bisogna aggiungere ai primi angoli i tre angoli DBC, BCD, CDH o CDB, che equivalgono due angoli retti; e provandosi la stessa cosa per qualunque angolo rientrante, ne segue che la somma, ec.

70. *Se in un triangolo* BAC (Fig. 43) *gli angoli* B e C *sono eguali*, *i lati* AC, AB *opposti a quest' angoli saranno pure eguali: viceversa se i lati sono eguali, saranno pure gli angoli eguali.*

Dall' angolo A abbassata la perpendicolare AO sopra il lato opposto BC; sarà 1.° i tre angoli dei due triangoli rettangoli AOB, AOC, eguali ciascuno a ciascuno; perchè oltre ai due angoli retti eguali AOB, AOC, gli angoli ABC, ACB, sono per ipotesi eguali: così questi due triangoli avranno il lato comune AO adjacente ai due angoli eguali, dunque saranno perfet-

tamente eguali, ed il lato $AC =$ al lato AB.

2.° Viceversa supposto $AC = AB$, l'angolo B sarà eguale all'angolo C; perchè i due triangoli rettangoli AOB, AOC, avendo il lato comune AO, e le ipotenuse AC, AB, eguali, sono perfettamente eguali: dunque l'angolo $C =$ all'angolo B.

71. Apparisce che se i tre angoli del triangolo BAC fossero eguali, i tre lati sarebbero pure eguali; e reciprocamente. Imperciocchè paragonando gli angoli, o i lati a due a due, si dimostrarebbe l'eguaglianza dei due lati, o dei due angoli; indi si concluderebbe l'eguaglianza di tutti i lati, e di tutti gli angoli.

Ritornando alle definizioni date del triangolo *equilatero*, e del triangolo *isoscele*, si vede che puossi chiamare triangolo *equilatero* quello che ha i tre angoli eguali; e triangolo *isoscele* quello che ha due angoli eguali, i quali sono opposti a dei lati eguali.

72. Due triangoli isosceli sono equiangoli, cioè hanno tutti i loro angoli eguali ciascuno a ciascuno; quando han-

no solamente due angoli corrispondenti eguali, o sia l'angolo del vertice eguale all'angolo del vertice, o uno degli angoli della base, eguale ad uno degli angoli della base. Imperciocchè, 1.° quando l'angolo del vertice è eguale all'angolo del vertice, la somma dei due angoli della base è eguale alla somma dei due angoli della base; ed essendo in ciascun triangolo gli angoli della base eguali, risulta che i tre angoli del primo triangolo saranno eguali rispettivamente ai tre angoli del secondo. 2.° Quando un angolo della base di uno dei triangoli è eguale all'angolo della base dell'altro triangolo, i due altri angoli delle basi sono pure eguali. Dunque i due triangoli hanno i tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.

Inutile sarebbe il far osservare che due triangoli equilateri sono sempre equiangoli, poichè ciascuno degli angoli di questi triangoli, equivale il terzo di due angoli retti.

73. *In qualunque triangolo, il lato maggiore è opposto all'angolo maggiore; e reciprocamente, l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore.*

Sia il triangolo ABC (Fig. 44). Se per esempio l'angolo C è maggiore dell'angolo B, il lato AB sarà maggiore del lato AC: e reciprocamente, se il lato AB è maggiore del lato AC, l'angolo C sarà maggiore dell'angolo B. Di fatti, abbassate dall'angolo A sul lato BC la perpendicolare AO; prendete OD = OC, e tirate DA; i due triangoli rettangoli AOC, AOD saranno perfettamente uguali, come aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; e per conseguenza l'angolo ADO è uguale all'angolo ACO. Ora la somma dei tre angoli del triangolo AOD essendo eguale alla somma dei tre angoli del triangolo AOB, e questi due triangoli avendo l'angolo O comune, ne segue, che se l'angolo ACO o sia ADO è > ABO, l'angolo DAO sarà < dell'angolo BAO. Dunque AB si scosterà più che AD dalla perpendicolare AO; e per conseguenza AB sarà > AD o sia AC. Reciprocamente, se è AB > AC o sia AD, AB si scosterà più che AD dalla perpendicolare AO; dunque l'angolo BAO sarà > dell'angolo DAO.

Ora la somma dei tre angoli del triangolo A O D vale la somma dei tre angoli del triangolo A O B; dunque a motivo dell' angolo comune O, l' angolo A D O o sia A C B sarà > dell' angolo A B C.

74. *Se due triangoli hanno due angoli ineguali, compresi tra' lati eguali ciascuno a ciascuno; il lato opposto al più grande di questi due angoli sarà più grande del lato opposto al più piccolo; e reciprocamente.*

Sieno i due triangoli B A C, B A D, (Fig. 45) che hanno il lato comune AB, il lato AC = A D, e i due angoli disuguali BAC, BAD. Ma se l' angolo B A D > B A C, il lato BD > BC; e reciprocamente.

Di fatti condotta C D si avrà il triangolo isoscele C A D, che sarà posto a canto del triangolo BAC, a cagione di BAD > B A C. Ma l' angolo ACD < BCD di cui fa parte; e ancora l' angolo B D C < A D C o di A C D: così l' angolo B C D > B D C. Dunque riguardando B D, B C, come lati del triangolo B C D, si avrà B D > B C.

Reciprocamente se B D > B C, l' an-

golo B A D sarà maggiore dell' angolo B A C; perchè volendosi che l' angolo B A D fosse minore o eguale a B A C, nè risulterebbe dal caso precedente che B D sarebbe minore o eguale a B C; ciò che è contrario all' ipotesi.

75. *Se in un quadrilatero* A B C D (Fig. 46) *i lati opposti sono paralleli, saranno essi eguali: e reciprocamente.*

Si conduca la diagonale BD: essendo i lati A D, B C paralleli, gli angoli alterni interni A D B, CBD sono eguali; e medesimamente, essendo i lati AB, DC paralleli, gli angoli A B D, B D C sono egnali. Dunque i due triangoli ABD, CBD sono perfettamente uguali, come aventi un lato eguale adjacente a due angoli eguali. Dunque AD = BC, ed AB = DC.

Reciprocamente, se in un quadrilatero i lati opposti sono eguali, questi lati sono paralleli a due a due. Imperciocchè i due triangoli ADB, CBD saranno perfettamente uguali, come aventi i tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Dunque gli angoli A D B, C B D sono eguali, e conseguentemente le due li-

me A D, B C sono parallele; parimente, i due angoli A B D, C D B sono eguali, e per conseguenza le linee A B, C D sono parallele.

76. Si chiama *parallelogrammo*, un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli. E siccome un tal quadrilatero ha eziandio i lati opposti eguali, si può dire del pari che un parallelogrammo è un quadrilatero, i cui lati opposti sono eguali.

Vi sono più specie di parallelogrammi. Se un parallelogrammo, come quello della Figura 46, ha due angoli acuti, e due angoli ottusi, dicesi *parallelogrammo obliquangolo*, o semplicemente *parallelogrammo*. Ed allorchè un parallelogrammo avendo due angoli acuti e due angoli ottusi, ha i suoi quattro lati eguali, chiamasi *rombo* (Fig. 47).

Un parallelogrammo che ha i suoi quattro angoli retti, si chiama *parallegrammo rettangolo* o *rettangolo* (Fig. 48). Se i quattro angoli essendo retti, i quattro lati sono eguali, il rettangolo prende il nome di *quadrato* (Fig. 49).

Un quadrilatero (Fig. 50) che ha sem-

plicemente due lati paralleli, si chiama *trapezio*.

CAPITOLO VI.

Dell' incontro delle linee rette colle linee circolari; e dell' incontro vicendevole delle linee circolari.

77. *Di tutte le linee che si ponno condurre* (Fig. 51, 52, 53) *da un punto* A *che non è nel centro d' un cerchio alla circonferenza; 1.° la più lunga è quella* AB, *che passa per il centro. 2.° Fra quelle* AD, AE *che non passano per il centro, la più lunga* AD *è quella che meno s' allontana da quella che passa per il centro: e reciprocamente.*

Il punto A può essere situato, o sopra la circonferenza (Fig 51), o dentro del circolo (Fig. 52), o fuori (Fig. 53). La dimostrazione è la stessa per le tre figure.

Condotti i raggi CD, CE, si avrà, 1.° $AB = AC + CB = AC + CD$, per essere $CD = CB$. Ma $AC + CD > AD$,

dunque AB > AD. Si proverà che anche AB > AE. Così la retta AB che passa per il centro è maggiore di tutte le altre AD, AE che non vi passano.

2.° CF + FD > CD, o CF + FD > CE. Sottraendo da una parte e dall'altra CF, resterà FD > FE; agiungendo ad una parte ed all'altra FA, si avrà FD + FA, o sia AD > FE + FA. Ma FE + FA > AE; dunque a maggior ragione AD > AE, in modo che due rette AD, AE che non passano per il centro, la più lunga è quella che meno s' allontana da quella che passa per il centro.

Reciprocamente, 1.° se la retta AB essendo supposta maggiore di tutte quelle che si ponno condurre da un punto A, che non è il centro d'un circolo, alla circonferenza, non passasse per il centro, ne seguirebbe dal primo caso, che la più lunga di tutte le linee che si ponno condurre dal punto A alla circonferenza non sarebbe quella che passa per il centro; poichè sarebbe qualunque altra linea che si supporrebbe non passarvi, ciò che involve contradizione.

2.° Se AD > AE, la retta AD s'accosterà più di AE ad AB che passa per il centro; altrimenti di due che inegualmente s' allontanano da AB, la più lunga non sarebbe quella che meno s' allontana, ma sarebbe qualunque altra linea che si supporrebbe allontanarsi di più; ciò che ancora involve contradizione.

78. Da un punto A che non è il centro del circolo, non si ponno condurre alla circonferenza più di due linee eguali; imperciocchè potendosi condurre solamente tre, bisognerebbe che due fossero poste da una stessa parte per riguardo a quella che passa per il centro; ma queste due linee non potrebbero eguagliarsi a meno che non si confondessero fra loro. Onde supposto che le rette AD, A*d* che cascano da differenti parti per riguardo ad AB, s' allontanano egualmente da AB, queste due linee sono eguali, ma ciascuna sarà maggiore di AF, a meno che il punto E non si confonda con D, ciò che farebbe che AF non differirebbe da AD.

79. Supponendosi che A sia sopra

la circoferenza (Fig. 51.), AB sarà un diametro del circolo. Questo diametro sarà maggiore di ciascuna delle corde *AD*, AE; e di due corde che sottendono ciascuna un arco minore della semiperiferia, la più lunga è quella che sottende un più grand' arco.

80. *Di tutte le rette* AB, AD, AE, *che si ponno condurre da un punto* A (Fig. 54, 55), *che non è il centro d'un circolo, alla circonferenza:* 1.° *la più corta è quella* BA, *o* AB *di cui il prolongamento passa per il centro:* 2.° *tra le altre* AD, AE *quella* AD *che meno s' allontana da* AB *è la più corta.*

Condotti i raggi CD, CE; 1.° si avrà (Fig. 54.) $CA + AD > CD$, o $CA + AD > CB$. Sottraendo CA, resterà $AD > AB$. E (Fig. 55) $AD + DC > AC$; sottraendo da una parte DC, e dall' altra la eguale CB, rimarrà $AD > AB$. Dunque nell' una, e nell' altra figura $AB < AD$. Si dimostrerebbe pure che $AB < AE$.

2.° (Fig. 54) $CF + FE > CE$, o $CF + FE > CD$, e sottraendo CF, si avrà $FE > FD$. Aggiungendo ad una parte ed all' altra FA, si avrà

FE + FA, o AE > FD + FA. Ma FD+FA>AD; tanto più sarà AE>AD. Nella figura 55, si ha AE + EC > AD + DC, sottraendo da una parte EC, e dall'altra la sua eguale CD, si avrà AE > AD. Così nell'una e nell'altra figura AD < AE.

81 *In un medesimo circolo, o in circoli che hanno raggi eguali, gli archi* AGD, MKN (Fig. 56), *che sono eguali, hanno delle corde* AD, MN *eguali. E reciprocamente quando le corde sono eguali, gli archi saranno eguali.*

1.° La circonferenza avendo la medesima curvatura in tutta la sua estensione, è chiaro che i due archi eguali AGD, MKN, ponno applicarsi esattamente l'uno sopra dell'altro, e che il punto A si confonderà con M, il punto D con N. Da ciò risulta che le due corde AD, MN, si confonderanno perfettamente, e sono per ciò eguali.

2.° Le corde AD, MN essendo supposte eguali, ed applicate l'una sopra dell'altra in modo che il punto A si confonda con M, il punto D con N; gli archi AGD, MKN, di cui le curvature sono le stesse, si confonderan-

no perfettamente, e sarenno perciò eguali.

82. *Se dal centro C d' un cerchio (Fig. 57) si abbassa la perpendicolare CO sulla corda* AB: *essa dividerà tanto la corda quanto l'arco* AFB, *in due parti eguali*.

1.° Poichè la retta CO è perpendicolare ad AB, e il centro C per dove passa è egualmente distante dai punti A e B, ne segue che questa linea passa pel mezzo di AB.

2.° La retta CO passa pel mezzo F dell' arco AFB. Imperciocchè, essendo perpendicolare sopra il mezzo di AB, ciascuno de' suoi punti, deve essere equidistante dai punti A e B. Ora il punto F è egualmente distante dai punti A e B, poichè gli archi FMA, FNB essendo supposti eguali, le corde FA, FB sono eguali. Dunque il punto F è situato sulla perpendicolare CO.

83. Di qui si scorge, che il centro del cerchio, il mezzo della corda e il mezzo dell' arco, sono tre punti sempre situati sopra la stessa linea che è perpendicolare alla corda. Ora due punti soli bastano per determinare la posizione

d' una linea retta. Dunque ogni linea che passerà per due dei tre punti proposti, passerà necessariamente pel terzo, e sarà di più perpendicolare alla corda.

84. Se conducasi una seconda corda MN parallela ad AB; i due archi MA, NB compresi fra queste due corde, saranno eguali. Imperciocchè la retta CO essendo perpendicolare ad AB, sarà altresì perpendicolare ad MN. Dunque il centro C, il punto E, mezzo di MN, il punto F, mezzo dell' arco MFN, sono situati sopra la perpendicolare CO. Ora, poichè si ha *arc.* FMA = *arc.* FNB, ed *arc.* FM = *arc.* FN; se si sottrae, termine da termine, la seconda egualità dalla prima, si avrà *arc.* MA = *arc.* NB.

Reciprocamente, se i due archi MA, NB, situati dalla stessa parte di AB, sono eguali, la corda MN sarà parallela ad AB. Imperciocchè, conducendo CO perpendicolare ad AB, si avrà *arc.* FMA = *arc.* FNB. Sottraendo da questa equazione *arc.* MA = *arc.* NB, si avrà *arc.* FM = *arc.* FN. Dunque la retta CO è eziandio perpendicolare ad MN. Ora la linea CO essendo perpendicolare a

ciascuna delle corde A B, M N, reciprocamente queste due corde sono ad essa perpendicolari; dunque elle formano colla medesima degli angoli alterni interni A D E, N E D eguali, siccome retti; e per conseguenza le due linee A B, M N sono parallele.

85. Problema. *Far passare una circonferenza di cerchio per tre punti dati* A, B, D (Fig. 58)?

Tirate le rette A B, B D. Conducete M E perpendicolare sul mezzo di A B, ed N F perpendicolare sul mezzo di B D. Dal punto C, ove queste due perpendicolari si tagliano, descrivete col raggio C A una circonferenza di cerchio: dico che ella passerà eziandio pei punti B e D, e che sarà perciò la circonferenza dimandata. Imperciocchè essendo C E perpendicolare sul mezzo di A B, le rette C A, C B sono eguali. Medesimamente essendo C F perpendicolare sul mezzo di B D, le rette C B, C D sono eguali; dunque esse sono raggi della medesima circonferenza che passa pei tre punti proposti.

86. Il punto C d' intersezione delle perpendicolari M E, N F essendo *uni-*

co; ne segue che per tre punti A, B, D non si può far passare che una circonferenza di cerchio, e che conseguentemente due circonferenze di cerchio non possono passare pei tre punti medesimi, senza confondersi.

87. *Se una retta* MN (Fig 59) *incontra la circonferenza d' un circolo in due punti* A *e* B. *essa taglierà il circolo, cioè entrerà nel circolo, e ne uscirà.*

Si conducano dal centro C i raggi CA, CB, e la perpendicolare CE sopra AB. Le due oblique CA, CB sono eguali, come raggi del medesimo circolo, e ciascuna di esse è maggiore della perpendicolare CE. Tutte le linee che si potranno condurre dal punto C alle parti AE, BE, saranno similmente più lunghe di CE e più corte di CA o CB. Dunque 1.° la parte AB della linea proposta è situata tutta intera dentro il circolo. 2.° Se dal punto C si guida al di là di A la retta qualunque CM, ed al di là di B, la retta qualunque CN, ciascuna di queste linee allontanandosi più che AC o CB dalla perpendicolare, sarà più

lunga di C A o C B. Dunque le parti A M, B N della linea in questione sono situate fuori del circolo. Dunque finalmente la linea M N entra nel circolo e ne esce; dunque essa taglia il circolo.

87. Immaginiamoci che la retta M N si muova parallelamente a se stessa, finchè i due punti A e B vengano a confondersi l'uno e l'altro col punto E (Fig. 60). Allora M N tocca semplicemente il circolo in E, e C E diventa un raggio, il quale è perpendicolare alla *tangente* M N.

88. Da ciò risulta, che per condurre ad una circonferenza una tangente che passi per un punto dato e situato sopra questa circonferenza, fa d' uopo condurre un raggio a questo punto ed innalzare da questo stesso punto una perpendicolare al raggio.

89. *Due circonferenze di cerchio che s' incontrano in due punti* N *ed* n (Fig. 61.), *si tagliano*.

Avendo congiunti i centri C ed O dei due circoli X ed Y colla retta C O, conduco dal centro C del cerchio X i raggi C N, C n, e la retta C Z S che

incontri in Z ed S la circonferenza del cerchio Y; guido in questo ultimo circolo i raggi OZ, ON, OS; e suppongo che le linee OZ, CN prolungate, se è necessario, s' incontrino in T. Adesso si ha 1.° $CO < CZ + ZO$, e $CO < CN + NO$; sottraendo i raggi uguali OK, OZ, ON, si avrà $CK < CZ$, e $CK < CN$; onde ne segue che il punto K è più vicino al centro C del cerchio X, che non lo sono i punti Z ed N. 2.° Si ha $OT < ON + NT$; sottraendo dell' una e dell' altra parte i raggi eguali OZ. ON, si avrà $ZT < NT$; ma $CZ < ZT + TC$; dunque a maggior ragione $CZ < NT + TC$, o sia $CZ < CN$. Quindi tutti i punti Z dell' arco NK*n* sono più vicini che il punto N al centro C, o ciò che torna allo stesso, sono situati dentro il cerchio X. 3.° Si ha OS o $ON < SV + OV$; sottraendo OV dall' una e dall' altra parte, si avrà $VN < VS$; ma $CV + VN > CN$; dunque a maggior ragione $CV + VS > CN$, o sia $CS > CN$. Quindi tutti i punti S dell' arco NSH*n* sono situati fuori del cerchio X. Dunque per fine il

cerchio Y entra nel cerchio X, e ne esce; dunque le circonferenze di questi due cerchj si tagliano ne' punti N ed *n*.

90. Immaginiamoci che il cerchio X rimanendo immobile, il cerchio Y se ne allontani secondo la direzione CO: egli è chiaro, che i punti N ed *n* si avvicineranno continuamente l'uno all' altro, e che per fine verranno a confondersi l'uno e l'altro col punto K (Fig. 62). Allora i due cerchj X ed Y si toccano. Laonde si vede che i centri di due cerchj, ed il loro punto di contatto, sono sempre situati sopra una medesima linea retta, e che ogni linea che passerà per due di questi punti, passerà necessariamente pel terzo.

Quindi, allorchè si vorranno descrivere due cerchj X ed Y che si tocchino, non si avrà che a mettere i loro raggi C K, K O l'uno appresso all'altro, sopra una stessa linea C O, ed a descrivere in seguito questi due cerchj dai punti C ed O, come centri.

Se si volesse che i due cerchj si toccassero al di dentro, bisognerebbe portare il raggio minore C K sopra il mag-

giote K O, in modo che il punto C cadesse sul punto c, ovvero che fosse $cK = CK$.

91. Se dal punto K s' innalza perpendicolarmente a C O, la retta AB; questa linea toccherà ciascuno dei due cerchj X ed Y; poichè ella sarà perpendicolare all' estremità di ciascuno dei raggi C K, O K.

CAPITOLO VII.

Uso della circonferenza del circolo per misurare e paragonare gli angoli: problemi diversi.

92. È facile d' immaginare più maniere di costruire un angolo e di riportare tutte le grandezze di questa natura ad una stessa unità. Ma la circonferenza del circolo, somministra i mezzi i più semplici ed i più comodi: mezzi che sono stati impiegati da tutti i geometri sì antichi che moderni, ed ai quali sarebbe fatica perduta il volerne sostituire degli altri.

93. Per una convenzione stabilita fra

gli antichi la circonferenza del circolo si divide in 360 *parti* o *gradi*; il grado in 60 *minuti*; il minuto in 60 *secondi*; il secondo in 60 *terzi*, ec. I gradi, minuti, secondi, terzi, ec. s'esprimono rispettivamente dai caratteri °, ', '', ''', che si scrivono in forma d' esponenti alla destra delle cifre che marcano i numeri; così 25 gradi, 46 minuti, 37 secondi, ec. si scriverà 25°, 46', 37'', ec.

94. Il raggio del circolo di cui la circonferenza serve a misurare gli angoli è una quantità arbitraria in modo che due circonferenze che hanno raggi differenti, sono sempre supposte divise in un numero stesso di parti corrispondenti, le quali sono soltanto maggiori nella più grande circonferenza, e minori nella più piccola. Imperciocchè se dallo stesso centro C (Fig. 63), con raggi differenti CA, Ca, si descrivano due circoli concentrici; ai gradi AD, DE, EF, ec. della prima circonferenza, corrisponderanno in egual numero i gradi *ad*, *de*, *ef*, ec. della seconda.

95. *In un medesimo circolo o in cir-*

soli eguali, *gli angoli eguali* A C B, D C E (Fig. 64) *il di cui vertice è nel centro*, *intercettano sopra la circonferenza degli archi eguali* A B, D E.

Reciprocamente, *se gli archi* AB, DE *sono eguali*, *gli angoli* A C B, D C E *saranno pure eguali*.

Perchè, 1.° se l'angolo A C B è eguale all' angolo D C E, questi due angoli potranno porsi uno sopra dell' altro, e siccome i loro lati sono eguali, è chiaro che il punto A cascherà in D, ed il punto B in E. Ma l' arco A B dovrà confondersi con l' arco D E; perchè se i due archi non fossero confusi in uno solo, vi sarebbe nell' uno, o nell' altro dei punti inegualmente lontani dal centro, ciò che è impossibile; dunque l' arco A B = D E.

2.° Se si suppone A B = D E, dico che l' angolo ACB sarà eguale a DCE; perchè se non sono eguali, sia A C B il maggiore, e sia preso ACI=DCE, si avrà, per ciò che si è dimostrato, A I = D E: ma per ipotesi, l' arco A B = D E; dunque si avrebbe A I = A B, o sia la parte eguale al tutto, ciò che è impossibile; dunque l' angolo A C B = D C E.

96. *Nel medesimo circolo o in circoli eguali, se due angoli al centro* ACB, DCE (Fig. 65), *sono fra di loro come due numeri interi, gli archi intercetti* AB, DE, *saranno fra di loro come i medesimi numeri, e si avrà la proporzione.*

Ang. ACB : Ang. DCE :: Arc. AB : Arc. DE.

Supponghiamo, per esempio: che i due angoli ACB, DCE sieno fra loro come 7 : 4; o ciò che torna lò stesso, supponghiamo che l' angolo M, il quale servirà di misura comune, sia contenuto sette volte in ACB, e quattro in DCE. Gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, ec., DC*x*, *x*C*y*, ec., essendo fra loro eguali, gli archi parziali A*m*, *mn*, *np*, ec., D*x*, *xy*, ec., saranno pure trà loro eguali; dunque l'arco intero AB starà all' arco intero DE come 7 è a 4. Chiaramente si vede che lo stesso ragionamento avrebbe luogo per altri numeri qualunque che si potessero sostituire al 7 ed al 4: dunque se il rapporto degli angoli ACB, DCE, può esprimersi in numeri interi, gli archi AB, DE, staranno frà di loro come gli angoli ACB, DCE.

97. Reciprocamente, se gli archi AB, DE, stassero fra di loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE, staranno come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB: DCE :: AB: DE; perchè gli archi parziali Am, mn, ec. Dx, xy, ec., essendo eguali, gli angoli parziali ACm, mCn, ec., DCx, xCy, ec. sono pure eguali.

98. *Qualunque sia il rapporto di due angoli* (Fig. 66) ACB, ACD, *questi staranno sempre fra di loro come gli archi* AB, AD, *intercetti fra loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi eguali.*

Supponendo che l'angolo minore sia posto nel maggiore: se la proporzione enunciata non ha luogo, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB è ad un arco maggiore o minore di AD. Sia quest'arco maggiore, e rappresentandolo per AO, avremo.

Ang. ACB: Ang. ACD:: Arc. AB: Arc. AO.

Immaginiamo presentemente che l'arco AB sia diviso in parti eguali, di cui ciascuna sia minore di DO, vi sarà almeno un punto di divisione tra D ed O. Sia I questo punto, e tirata CI,

gli archi A B, A I, staranno fra di loro come due numeri interi, e s' avrà in virtù del teorema precedente.

Ang. ACB : Ang. ACI :: Arc. AB : Arc. AI.

Ma in queste due proporzioni essendo gli antecedenti i medesimi, ne segue che i conseguenti sono proporzionali, e che però.

Ang. A C D : Ang. A C I :: Arc. AD : Arc. AI.

Ora essendo l' arco A O > A I; bisognerebbe dunque perchè la proporzione sussistesse, che l' angolo A C D fosse maggiore di A C I; ma al contrario è minore, dunque è impossibile che l' angolo ACB stia all' angolo ACD come l' arco A B ad un arco maggiore di A D.

Si dimostrerebbe con un ragionamento simile, che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AD, dunque è esattamente AD; dunque si ha la proporzione.

Ang. ACB : Ang. ACD :: Arc. AB : Arc. AD.

99. Poichè l' angolo al centro del circolo e l' arco intercetto tra' i suoi lati, hanno un tal legame fra di loro che quando uno aumenta o diminuisce in un rapporto qualunque, l' altro au-

menta o diminuisce nello stesso rapporto, possiamo prendere una di queste grandezze per misura dell' altra; quindi in seguito prenderemo l' arco A B per misura dell' angolo A C B. Fa d' uopo però osservare nel confronto degli angoli fra di loro, che gli archi che servono di misura sieno descritti con raggi eguali; mentre è ciò che si è pusto in tutte le proposizioni precesupdenti.

100. *L' angolo inscritto* B A D (Fig. 67) *ha per misura la metà dell' arco* B D *compreso tra suoi lati*.

Posto primieramente che il centro del circolo sia situato nell' angolo BAD, si condurrà il diametro AE, ed i raggi CB, CD. L' angolo BCE, esterno al triangolo ABC, è eguale alla somma dei due interni C A B, A B C: ma il triangolo BAC essendo isoscele, l' angolo CAB = ABC; dunque l' angolo BCE è doppio di BAC. L' angolo BCE, come angolo al centro, ha per misura l' arco B E; dunque l' angolo B A C avrà per misura la metà di B E. Similmente l' angolo C A D avrà per misura la metà di ED; dunque BAC + CAD =

sia BAD avrà per misura la metà di BE + ED o sia la metà di BD.

Supponghiamo in secondo luogo che il centro C sia situato fuori dell' angolo BAD (Fig. 68). Allora condotto il diametro AE, l' angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l' angolo DAE la metà di DE; dunque la loro differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED, o la metà di BD.

Dunque qualunque angolo inscritto ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.

101. Tutti gli angoli BAC, BDC, ec. (Fig. 69) inscritti nel medesimo segmento sono eguali, perchè hanno per misura la metà dell' arco BOC.

102. Qualunque angolo BAD (Fig. 70), inscritto nel semicircolo è un angolo retto, perchè ha per misura la metà della semiperiferia BOD, o sia la quarta parte della periferia.

103. Qualunque angolo BAC (Fig. 69), inscritto in un segmento maggiore del semicircolo è un angolo acuto, perchè ha per misura la metà dell' arco BOC minore d' una semiperiferia.

E qualunque angolo BOC inscritto in un segmento minore del semicircolo è un angolo ottuso, mentre ha per misura la metà dell' arco BAC maggiore d' una semiperiferia.

104. *L' angolo* BAC. (Fig. 71) *formato da una tangente ed una corda, ha per misura la metà dell' arco* ADC *compreso fra i suoi lati*.

Al punto di contatto A condotto il diametro AD, l' angolo BAD è retto, ed ha per misura la metà della semiperiferia AMD, l' angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD + DAC o sia BAC ha per misura la metà di AMD, più la metà di DC, o sia la metà dell' arco intero ADC.

Si dimostrerebbe ancora che l' angolo CAE ha per misura la metà dell' arco AC compreso fra i suoi lati.

105. Finiremo questa prima parte con proporre una scelta di problemi geometrici da sciogliersi dai giovani con i principj esposti fin quì.

I.° Construire un angolo che sia eguale ad un angolo dato, o che ne sia multiplo un certo numero di volte.

II.° Da un punto dato condurre una parallela ad una retta data.

III.° Dividere una retta data in due parti eguali.

IV.° Da un punto dato condurre una tangente ad un circolo dato.

V.° I tre lati d' un triangolo, essendo dati, descrivere il triangolo.

VI.° Dividere un angolo o un arco dato in due parti eguali.

VII.° Ad un punto d' una retta, fare un angolo eguale ad un dato.

VIII.° I lati adjacenti d' un parallelogrammo essendo dati con l' angolo che comprendono, descrivere il parallelogrammo.

IX.° Trovare il centro d' un circolo o d' un arco dato.

X.° Inscrivere un circolo in un triangolo dato.

PARTE SECONDA

Delle superficie.

106. L' oggetto generale di questa seconda parte è d' insegnare a misurare le superficie dei poligoni, e di

paragonare fra di loro due poligoni simili, sì in riguardo dei loro contorni o linee omologhe, che in riguardo delle loro superficie.

CAPITOLO I.

Misura della superficie d'un poligono qualunque.

107. Misurare la superficie o area d'un poligono, è cercare quante volte essa contiene un'altra superficie riguardata come unità.

108. La superficie di cui abbiamo l'idea la più chiara, e che altronde convien prendere per unità, si è il quadrato; imperciocchè questo è composto di quattro lati eguali, e di quattro angoli retti: ed il rapporto de' suoi lati è il più semplice di tutti, e l'angolo retto è quello che noi ci rappresentiamo più facilmente, per l'assuefazione in cui siamo di vedere gli oggetti ritti, o di veder cadere i corpi secondo la linea perpendicolare o a piombo, ec. È ben vero che il trian-

golo ha meno lati, e meno angoli del quadrato; ma se può avere li tre lati eguali, non può però avere più d' un angolo retto. Essendo dunque il quadrato preferibile per servire d' unità di misura delle superficie al triangolo, ed a qualunque altra figura, i Geometri di comune consenso lo hanno addottato, ed hanno perciò formata l' espressione *quadratura d' una superficie* o *d' una figura*, volendo con questa esprimere il valore o determinazione della figura in tanti quadrati.

Prima di parlare della quadratura de' poligoni rettilinei, daremo alcune definizioni.

109. Si chiama *altezza* d' un parallelogrammo ABCD (Fig. 72), o d' un triangolo ABC, la perpendicolare AO abbassata da un angolo sopra l' opposto lato BC prolungato se fia necessario. Il lato sopra di cui casca la perpendicolare, si chiama base del parallelogrammo, o del triangolo. Nel rettangolo l' altezza si confonde con il lato EB, perchè EB è perpendicolare a BC.

Si vede che due parallelogrammi ABCD, MNPQ, che hanno eguali

altezze A O, M R, o pure due triangoli A B C, M N P, che hanno le medesime altezze A O, M R, ponno sempre supporsi compresi tra le stesse parallele, poichè due linee parallele sono da per tutto egualmente distanti l' una dall' altra.

110. *Qualunque parallelogrammo* ABCD, *è eguale in superficie ad un rettangolo* E B C F *di medesima base, ed altezza.*

Nel parallelogrammo A B C D, si ha A B = D C, A D = B C; e medesimamente nel rettangolo E B C F, si ha EB = FC, EF = BC. Dunque AD = EF. Levando la porzione A F dall' una e dall' altra parte, si avrà E A = F D. Dunque i due triangoli F C D, E B A hanno i tre lati eguali, ciascuno a ciascuno, e sono quindi perfettamente eguali. Aggiugnendo a ciascuno di essi il trapezio A B C F, si avrà il parallelogrammo A B C D eguale al rettangolo E B C F.

111. Dunque, se i due parallelogrammi A B C D, M N P Q, che hanno delle altezze uguali, hanno di più la medesima base, o ciò che torna allo stes-

so, delle basi eguali BC, NP, essi avranno anche superficie uguali, comunque differenti possano essere i loro angoli. Imperciocchè ciascuno di essi è uguale ad un rettangolo della stessa base e della medesima altezza.

112. Ogni triangolo ABC può essere considerato come la metà del parallelogrammo ABCD, che ha la medesima base e la medesima altezza di esso. Dunque, poichè questo parallelogrammo è uguale al rettangolo EBCF, della stessa base e della medesima altezza, ne segue che ogni triangolo è la metà d' un rettangolo della stessa *base* e della medesima altezza di esso.

113. Dunque, se i due triangoli ABC, MNP, che hanno delle altezze uguali, hanno di più le loro basi BC, NP eguali, essi avranno superficie eguali, comunque differenti possano essere i loro angoli. Imperciocchè, per l' articolo precedente, ciascuno di essi è la metà d' un rettangolo della stessa base e della medesima altezza.

Da queste proposizioni si scorge, che

quando si saprà trovare la superficie d' un rettangolo, si saprà trovare eziandio quella d' un parallelogrammo qualunque, e quella d' un triangolo qualunque.

114. *La superficie d' un rettangolo* EBCF. (Fig. 73) *è eguale al prodotto della sua base e della sua altezza; il che si esprime così:* EBCF = BC × BE.

Il senso di questo enunziato si è, che prendendo una certa misura, il piede per esempio, per unità lineare, e questa misura essendo contenuta, se si vuole, 15 volte nella base BC del rettangolo, e 12 volte nella sua altezza BE, la superficie di questo rettangolo conterrà 15 × 12 o sia 180 piedi quadrati, cioè a dire, 180 quadrati che hanno ciascuno un piede di lato.

Siano sopra la base BC, le parti Bf, fg, gh, ec. le unità di linea; e sopra l' altezza BE, le parti Bm, mn, np, ec. parimente le unità di linea. Ciò posto, 1.° da tutti i punti f, g, h, ec. della base guidate delle parallele all' altezza BE, il rettangolo EBCF si troverà diviso in rettangoli che hanno tutti la medesima altezza di esso,

e per basi le unità di linea; ed il numero di questi rettangoli parziali o elementari è quello delle divisioni della base B C. 2.° Da tutti i punti *m*, *n*, *p*, ec. dell'altezza, guidate delle parallele alla base B C, ciascun rettangolo parziale sarà diviso in altrettanti quadrati che hanno le unità di linea per lati, quante sono le divisioni nell' altezza. Dunque, per avere il numero dei quadrati contenuti nella superficie del rettangolo totale E B C F, bisogna ripetere il numero dei rettangoli elementari, o sia il numero delle divisioni della base BC, tante volte quante sono le divisioni dell' altezza BE. Dunque questa superficie è espressa da B C × B E.

Se l' unità di linea non è contenuta esattamente nella base B C o nell' altezza BE, potrà trovarsi nell' espressione della superficie E B C F una frazione di quadrato, che si valuterà, se si giudica a proposito, in misure quadrate d' un ordine inferiore.

115. Dunque la superficie del parallelogrammo qualunque ABCD (Fig. 72) =BC×AO. Quindi, se la base BC=25

piedi, l'altezza A O = 17 $\frac{1}{2}$ piedi; la superficie A B C D sarà di 437 $\frac{1}{2}$ piedi quadrati.

116. Dunque la superficie del triangolo $ABC = \frac{BC \times AO}{2}$. Quindi, se

BC = 25 piedi, A O = 17 $\frac{1}{2}$ piedi; la superficie ABC = 218 $\frac{3}{4}$ piedi quadrati.

117. Due parallelogrammi A B C D, M N P Q, che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le basi B C, N P. Imperciocchè A B C D: M N P Q :: B C × A O: N P × M R. Ora poichè A O = M R, se si dividono i prodotti BC×AO, N P × M R per queste quantità uguali, il loro rapporto rimarrà sempre lo stesso. Dunque A B C D: M N P Q :: B C : N P.

Per la stessa ragione, due triangoli A B C, M N P, che hanno la medesima altezza, sono tra loro come le basi BC, NP; imperocchè sono le metà de' parallelogrammi di medesime basi e di medesime altezze: e le metà sono fra loro come i tutti.

Si può dire, sempre per le stesse ragioni, che due parallelogrammi o due

triangoli che avessero delle basi eguali, sarebbero tra loro come le altezze.

118. *Determinare la superficie d' un trapezio* A B C D (Fig. 74)?

Conduco la diagonale A C, la quale divide il trapezio in due triangoli A B C, C A D, che si possono riguardare come aventi per altezza comune la perpendicolare A O, abbassata dall' angolo A sopra il lato B C che è parallelo ad A D. Quindi la somma delle superficie di questi triangoli, o sia la superficie del trapezio $= \frac{BC \times AO}{2} + \frac{AD \times AO}{2} = \frac{(AD + BC) \times AO}{2}$. Laonde si vede che

la superficie d' un trapezio è uguale alla metà del prodotto della somma de' suoi due lati paralleli nella distanza di questi lati.

119. Se dal punto M, mezzo di AB, conducasi la retta MN parallela a BC o ad AD, i triangoli simili AMP, ABO daranno AM: AB:: MP: BO:: AP: AO; dunque $MP = \frac{BO}{2}$, $AP = \frac{AO}{2}$;

Da un altro canto, se si abbassa DK perpendicolare sopra BC, si avrà $DK = AO$, $SK = PO$, $DS = AP$; e DS o $AP : DK$ o $AO :: SN : KC$; dunque

$SN = \frac{KC}{2}$. Per conseguenza $MP +$

$PS + SN = \frac{BO}{2} + OK + \frac{KC}{2} = \frac{BO}{2} +$

$\frac{OK}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{KC}{2}$; cioè a dire . . .

$MN = \frac{BC + AD}{2}$. Dunque l'area del

trapezio ha ancora per espressione $MN \times AO$, cioè il prodotto della sezione media MN parallela ai due lati paralleli, nella distanza di questi lati.

120. Supponiamo che sopra la retta AE (Fig. 75) s'innalzi un numero qualunque di perpendicolari AF, BG, CH, DK, EI: ed in seguito si conducano le rette FG, GH, HK, KI: la somma di tutti i trapezi AFGB, BGHC, ec.

avrà per valore $\frac{(AF + BG) \times AB}{2} +$

$$\frac{(BG+CH)\times BC}{2}+\frac{(CH+DK)\times CD}{2}+\frac{(DK+EI)\times DE}{2}.$$

Allorchè tutte le parti AB, BC, CD, DE della base sono eguali, questa espressione può cangiarsi in quest' altra

$$\frac{AB\times(AF+BG+BG+CH+CH+DK+DK+EI)}{2}$$

la quale si riduce ad . . . .

$$AB\times\left(BG+CH+DK+\frac{AF+EI}{2}\right).$$

Laonde si vede, che *per avere la superficie d' una serie di trapezj le cui basi* AB, BC, ec. *siano eguali, bisogna moltiplicare una di queste basi, per la somma risultante dalla somma delle perpendicolari intermedie e dalla metà della somma delle perpendicolari estreme*.

Così per esempio, si supponga che ciascuna delle divisioni AB, BC, CD, ec. sia di 1 tesa; ed AF = 10 tese, BG = 11 tese, CH = 9 tese, DK = 12 tese, EI = 16 tese: la superficie

AEIKHGF sarà di 45 tese quadrate.

Vi sono dei Pratici che nel caso di cui trattasi, aggiungono insieme tutte le perpendicolari AF, BG, GH, ec.; dividono la somma de' loro valori pel loro numero, a fine di avere ciò che chiamano un' *altezza ridotta*; poi moltiplicano quest' altezza per la base AE, per avere la superficie AEIKHGF. Seguendo questa pratica, si troverebbe che nell' ipotesi proposta, la superficie AEIKHGF è di $46\frac{2}{5}$ tese quadrate: risultato che differisce dal precedente, e che è per conseguenza inesatto.

121. Problema *Determinare la superficie d' un poligono qualunque* ABCDF (Fig. 76)?

Conduco da un angolo A di questo poligono delle diagonali AC, AD agli angoli C, D; il che divide il poligono in triangoli ABC, ACD, ADF. Dal medesimo angolo A, abbasso sopra le basi BC, CD, DF di questi triangoli, prolungate se è necessario, le perpendicolari AG, AH, AI. La superficie del poligono essendo eguale alla somma delle superficie di tutti i triangoli proposti, avrà per espressione

$$\frac{BC \times AG}{2} + \frac{CD \times AH}{2} + \frac{DF \times AI}{2}.$$

Egli è chiaro, che si può determinare egualmente la superficie del poligono, conducendo da un punto O, preso arbitrariamente dentro il poligono A B C D E (Fig. 77), le rette OA, OB, OC, ec. a tutti gli angoli: poi aggiungendo insieme le espressioni di tutti i *triangoli* OAB, OBC, OCD, ec.

Il metodo precedente serve generalmente a trovare le superficie di ogni sorta di poligoni rettilinei. Ma per rapporto ai poligoni regolari, esso è suscettibile di abbreviazione, come siamo per vedere.

122. Si chiama *poligono regolare* un poligono ABCDEF (Fig. 78), che ha tutti i lati ed angoli eguali.

123. Da ciò risulta che se dal mezzo dei due lati AB, BC, contigui all' angolo B, s' inalzino le perpendicolari MO, NO che s' incontrino in O; poscia dal punto O come centro, e con il raggio *OB* si descriva una circonferenza di circolo, questa passerà per i vertici di tutti gli angoli del poligono. Perchè la

circonferenza descritta dal punto O come centro, e con il raggio O B, passa per i tre punti A, B, C; quindi conducendo dal punto O ai tre angoli B, A, C, del poligono le tre linee OB, OA, OC, queste linee sono eguali; ed i due triangoli A O B, B O C, sono isosceli e perfettamente eguali. Dallo stesso punto O si conducano ai tre angoli del poligono le rette O D, O E, ec. Ciò posto, a cagione degli angoli eguali OCB, OBA, O B C, e dell' angolo B C D = A B C, per la natura del poligono, i due angoli O B C, O C D, sono eguali. Dunque essendo O C = O B, e C D = B C per la natura del poligono i due triangoli C O D, B O C, sono perfettamente eguali, avendo un angolo eguale compreso fra lati eguali: dunque il punto D è situato sopra la circonferenza. Si dimostrerebbe pure che il triangolo D O E è eguale al triangolo COD; è così di seguito andando da un triangolo all' altro contiguo. Da ciò risulta che i vertici degli angoli del poligono sono situati sopra la circonferenza.

Chiaramente si vede che abbassando dal centro del circolo circonscritto del-

le perpendicolari OM, ON, OP, ec. sopra i lati del poligono, tutte queste perpendicolari sono eguali, esprimendo ciascuna l'altezze dei triangoli isosceli, che sono esattamente eguali: ognuna di queste perpendicolari si chiama l'*apotema* del poligono.

124. *L'area d'un poligono regolare è eguale alla metà del prodotto del suo contorno o perimetro per la sua apotema.*

L'area del poligono regolare ABCDEF è eguale alla somma di tutti i triangoli AOB, BOC, COD, ec. che hanno per basi i suoi lati, e per altezza le sue apoteme. Dunque quest'area verrà espressa da $\frac{AB \times OM}{2} + \frac{BC \times ON}{2} + \frac{CD \times OP}{2} +$ ec. Quindi rappresentando tutte le altezze eguali OM, ON, OP, ec. da una OM di esse, l'espressione precedente diventerà $\frac{AB \times OM}{2} +$

porzionale tra il diametro e l' ascissa corrispondente.

2.° *L' ordinata sarà media proporzionale tra le due ascisse.*

Di fatti 1.° essendo retto l' angolo B A C, se si costruiscano i quadrati B C E G, A B I H, A C K L, e si prolunghi la perpendicolare A D, per compire i rettangoli B D F G, C D F E, si avrà ABIH = BDFG, o sia $(AB)^2 = BG \times BD = BC \times DB$; e perciò BC : AB :: AB : BD. Ancora $(AC)^2 = BC \times DC$; e BC : AC :: AC : DC.

2.° I due triangoli rettangoli B D A, A D C, sono simili l' uno e l' altro al triangolo rettangolo totale BAC di cui fanno parte, poichè oltre i tre angoli retti eguali, ciascuno dei due triangoli parziali ha un angolo acuto comune con il triangolo totale. Dunque i due triangoli parziali sono simili fra di loro, e danno la proporzione BD : AD :: AD : DC; o sia l' equazione $(AD)^2 = BD \times DC$.

Questo teorema contiene la proprietà caratteristica del circolo.

169. Il quadrato del diametro ed i quadrati delle corde AB, AC, stanno

fra di loro come il diametro e l'ascisse BD, DC; cioè si ha la serie $(BC)^2 : (AB)^2 : (AC)^2 :: BC : BD : DC$. Questa serie risulta dall'equazioni $(BC)^2 = BC \times BC$, $(AB)^2 = BC \times BD$, $(AC)^2 = BC \times DC$, che hanno nel secondo membro il fattor comune BC.

170. *Se tre figure simili formano, con i loro lati omologhi, l'ipotenusa ed i lati d'un triangolo rettangolo, la prima figura sarà eguale alla somma delle due altre, e queste tre figure staranno fra di loro come l'ipotenusa ed i suoi segmenti.*

Imperciocchè le figure simili stanno fra di loro come i quadrati dei loro lati omologhi; avranno dunque le une per rapporto all'altre le stesse proprietà di questi quadrati.

171. Siccome i semicircoli sono figure simili, si vede che se si hanno tre semicircoli (Fig. 111), che abbiano per diametri l'ipotenusa BC, ed i lati AB, AC del triangolo rettangolo BAC; il semicircolo BCMB sarà eguale alla somma dei due altri semicircoli BANB, CAOC: e che queste tre figure staranno fra di loro come le linee BC,

BD, DC. Di più vedesi che sottratte le parti comuni al primo semicircolo ed a ciascuno dei due altri, resterà il triangolo rettilineo B A C eguale alla somma delle due *lunule* A P B N A, A M C O A.

Quando il triangolo rettangolo BAC è isoscele, le due lunule divengono eguali; ed allora ciascheduna d'esse equivale la metà del triangolo B A C, o quello che ritorna lo stesso, esse ponno riguardarsi come eguali ciascuna a ciascuna dei triangoli rettangoli (eguali) A D B, A D C: ma è necessario osservare che quest' eguglianza di lunule con i triangoli di cui si tratta non è dimostrata che nel solo caso dove il triangolo rettangolo proposto B A C è isoscele. Ipocrate di Chio è il primo che abbia data questa determinazione di lunule, ed è perciò che chiamansi *le lunule d' ipocrate*.

172. Problema I. *Trovare una media proporzionale fra due linee date* H K, K B (Fig. 112)?

Mettete queste linee l'una di seguito all'altra; dividete la somma HB in due parti eguali al punto C; da que-

sto punto; col raggio CH o CB, descrivete il semicerchio HMB; alzate al punto K perpendicolarmente ad HB l'ordinata KM: questa linea sarà la media proporzionale cercata.

173. Problema II. *Essendo date più figure simili, costruire una nuova figura che sia simile, ed eguale alla loro somma.*

Cominciate a determinare le linee omologhe delle figure proposte. Sieno AB, AC (Fig. 113), le linee omologhe di due di queste figure; ponete queste due linee ad angolo retto, ciò che si fa elevando all' estremità di una di esse una perpendicolare eguale all' altra; tirate l' ipotenusa BC del triangolo rettangolo BAC; sopra BC, come linea omologa ad AB e AC, costruite una figura simile alle due prime: questa figura sarà eguale alla somma delle due prime. Sia CD la linea d' una terza figura omologa ad AB, AC, BC; mettete BC e CD ad angoli retti; tirate l' ipotenusa BD del secondo triangolo rettangolo BCD; sopra BD, come linea omologa alle prime linee, costruite una nuova figura simile alle pre-

cedenti; essa sarà eguale alla somma delle due figure costrutte sopra BC e CD, o alla somma delle tre figure formate sopra AB, AC, CD. Continuando ad operare sempre nella stessa guisa, si giungerà a costruire una figura che sarà eguale alla somma d' un numero qualunque di figure simili, e che loro sarà simile.

CAPITOLO IV.

Continuazione dello stesso soggetto: valore di certi quadrati relativamente alle linee o porzioni di linee sopra delle quali sono costrutti.

174. *Il quadrato d' una linea* BC (Fig. 114) *composta di due parti* BD, DC, *è eguale alla somma dei quadrati di queste due parti, più il doppio prodotto di una per l' altra;* cioè $(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2 + 2BD \times DC$.

Sopra BC, come diametro, descrivete il semicircolo BAC; dal punto D inalzate la perpendicolare DA, e tirate le AB, AC. A cagione dei tre

triangoli rettangoli BAC, BDA, ADC; si avranno l' equazioni,

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$
$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

Ponendo nella prima per $(AB)^2$ ed $(AC)^2$ i loro valori ricavati dalle due altre, s' avrà $(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2 + 2(AD)^2$. Mettendo ancora per $(AD)^2$ il suo valore $BD \times DC$, si avrà $(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2 + 2BD \times DC$.

175. *La differenza dei quadrati di due linee* DC, DB, *è eguale al prodotto della somma di queste due linee, moltiplicato per la loro differenza*, cioè

$$(DC)^2 - (DB)^2 = (DC + DB) \times (DC - DB).$$

Mettete le linee DC, DB, l' una di seguito all' altra, sopra la loro somma BC, come diametro descrivete un semicircolo; dal punto D inalzate sopra BC la perpendicolare DA, e tirate le corde AB, AC. S' avrà $(DC)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$; $(DB)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$. Dunque mettendo per $(AC)^2$ ed $(AB)^2$ i loro valori $BC \times DC$ e $BC \times DB$, $(DC)^2 = DC \times BC - (AD)^2$; $(DB)^2 =$

$DB \times BC - (AD)^2$; ciò che dà $(DC)^2 - (DB)^2 = DC \times BC - DB \times BC = BC(DC - DB) = (DC + DB)(DC - DB)$.

176 Quando una linea BC (Fig. 115) è divisibile in due parti eguali al punto M, e in due parti disuguali al punN; il quadrato della metà di questa linea, meno il quadrato della parte compresa tra i due punti di divisione è eguale al prodotto dei due segmenti disuguali della stessa linea, cioè $(BM)^2 - (MN)^2 = BN \times NC$. Perchè $(BM)^2 - (MN)^2 = (BM + MN) \times (BM - MN) = BN \times (BM - MN) = BN \times (CM - MN) = BN \times NC$.

177. *Se in un triangolo ottusangolo* MQN (Fig. 116) *si abbassi dall' angolo acuto* M *la perpendicolare* MO *sopra il lato opposto prolongato, s' avrà* $(MN)^2 = (MQ)^2 + (NQ)^2 + 2NQ \times QO$.

I triangoli rettangoli MON, MOQ, danno

$$(MN)^2 = (MO)^2 + (NO)^2$$
$$(MO)^2 = (MQ)^2 - (QO)^2$$

e (174) si ha $(NO)^2 = (NQ)^2 + (QO)^2 + 2NQ \times QO$. Dunque $(MN)^2 = (MQ)^2 + (NQ)^2 + 2NQ \times QO$.

Ma indicando per A semplicemente il lato M N, per B il lato N Q, per C il lato Q M, e per S il segmento Q O; la precedente equazione si trasformerà in $A^2 = B^2 + C^2 + 2B \times S$.

178. Quest'equazione dà $2B \times S = A^2 - B^2 - C^2$, e perciò $S = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}$, valore del segmento Q O espresso per mezzo dei tre lati del triangolo.

Aggiungendo insieme le linee O Q, Q N, e chiamata S′ la loro somma, o il gran segmento O N, s' avrà $S' = B + S = B + \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B} = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2B}$; espressione nella quale non v' entrano che i lati del triangolo.

179. Sia chiamata P la perpendicolare M O, o sia l' altezza del triangolo. Il triangolo rettangolo M O Q darà $P^2 = C^2 - S^2 = (C + S)(C - S)$. Sostituendo per S il suo valore $\frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}$, s' avrà

$$P^2 = \left(C + \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}\right) \times \left(C - \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}\right) =$$

$$\frac{(A^2-B^2-C^2+2B\times C)(C\times 2B-A^2+B^2+C^2)}{4B^2}$$

Ma $A^2 - B^2 - C^2 + 2B \times C = A^2 - (B^2 - 2B \times C + C^2) = A^2 - (B-C)^2 = (A+B-C)(A-B+C)$. Similmente l'altro fattore $C \times 2B - A^2 + B^2 + C^2 = (C^2 + B^2 + 2B \times C) - A^2 = (C+B)^2 - A^2 = (C+B+A)(C+B-A)$. Dunque sostituendo s' avrà . . . .

$$P^2 = \frac{(A+C-B)\times(A-C+B)\times(C+B+A)\times(C+B-A)}{4B^2}$$

$$\text{e } P = \frac{\sqrt{[(A+B+C).(A+B-C).(A+C-B).(C+B-A)]}}{2B},$$

espressione della perpendicolare che in questo caso casca fuori del triangolo.

180. *Se in un triangolo* MNQ (Fig. 117), *la perpendicolare* MO *abbassata da uno degli angoli sopra il lato opposto, casca in dentro del triangolo, s' avrà* (*chiamando* MN, A; NQ, B; MQ, C; QO, S), $A^2 = B^2 + C^2 - 2B \times S$. Di fatti si ha, a cagione dei due triangoli rettangoli MON, MOQ,

$$(MN)^2 = (MO)^2 + (NO)^2.$$
$$(MO)^2 = (MQ)^2 - (OQ)^2$$

Altronde NO essendo la differenza delle linee NQ, OQ, si ha (175), $(NO)^2 = (NQ)^2 + (OQ)^2 - 2NQ \times OQ$. Sostituendo per $(MO)^2$ ed $(NO)^2$ i rispettivi valori, si troverà $A^2 = B^2 + C^2 - 2B \times S$.

181. Da quest' equazione si ricava $S = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2B}$. Volendosi avere l'altro segmento ON, che si chiamerà S', si troverà $S' = B - S = B - \left(\frac{B^2 + C^2 - A^2}{2B}\right) = \frac{B^2 + A^2 - C^2}{2B}$.

182. Chiamando P la perpendicolare MO, ed operando interamente nella stessa guisa che si è fatto nell' articolo 179, si troverà

$$P = \frac{\sqrt{[(A+B+C).(A+B-C).(A+C-B).(C+B-A)]}}{2B}.$$

Confrontando i valori delle due perpendicolari (Fig. 116, e 117), si vedrà che esse sono interamente simili. Perciò potremo formare il seguente teorema. *La perpendicolare abbassata*

da un angolo qualunque d' un triangolo sopra il lato opposto, prolongato se sia necessario, è sempre rappresentata da una frazione che ha per numeratore la radice del prodotto della somma dei tre lati del triangolo, moltiplicata per le tre differenze della somma dei due lati col terzo lato, e per denominatore il doppio del lato sopra del quale, o sopra il di cui prolongamento, cade la perpendicolare.

183. Problema. *Esprimere l' area d' un triangolo per mezzo dei tre lati?*

Abbassando dall' angolo M (Fig. 116, o 117) la perpendicolare M O sopra il lato opposto, l' espressione dell' area del triangolo è $\frac{NQ \times MO}{2}$, o sia $\frac{B \times P}{2}$.

Sostituendo per P il valore trovato, s' avrà per l' area del triangolo

$$\frac{\sqrt{[(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(C+B-A)]}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{[(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(C+B-A)]}}{\sqrt{16}} =$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\left(\frac{A+B-C}{2}\right)\left(\frac{A+C-B}{2}\right)\left(\frac{C+B-A}{2}\right)\right]}.$$

CAPITOLO V.

Proprietà di certe linee in risguardo al circolo.

184. Due linee AB, DE (Fig. 118), sono dette tagliate *in parti reciprocamente proporzionali*, quando le due parti AC, CB, dell' una sono gli estremi o i medj d'una proporzione, nel tempo stesso che le due parti DF, FE della seconda, sono i medj o estremi, cioè quando si ha AC : DF :: FE : CB, o DF : AC :: CB : FE.

185. Due linee sono dette *reciprocamente proporzionali alle loro parti*, quando una linea intera ed una delle sue parti sono gli estremi o i medj d' una proporzione nel tempo stesso, che l' altra linea intera ed una delle sue parti formano i medj o gli estremi, cioè quando si ha AB : DE :: DF : AC, o DE : AB :: AC : DF.

186. Una linea è detta tagliata *in media ed estrema ragione*, quando una delle sue parti è media proporzionale tra la linea intera e l' altra parte. Co-

sì per esempio, la linea AB sarà tagliata in media ed estrema ragione al punto C, se si ha la proporzione AB : AC :: AC : CB.

187. *Due corde* (Fig. 119.) *d' un circolo, che si tagliano in O, si tagliano in parti reciprocamente proporzionali; cioè si ha* AO : DO :: OE : OB.

Condotte le corde AE, BD; i due triangoli AOE, DOB sono simili, perchè hanno i loro angoli eguali ciascuno a ciascuno, come è facile riconoscerlo, considerando che oltre gli angoli opposti al vertice in O, hanno degli angoli che a due a due hanno il vertice alla circonferenza, e s' appoggiano sopra cerchi medesimi. Quindi si ha la proporzione enunciata AO : DO :: OE : OB.

188. Sopponghiamo (Fig. 120) che la corda AB passi per il centro, o che sia diametro del circolo, e che la corda DE sia perpendicolare ad AB. Allora la corda DE è divisa in due parti eguali al punto O; e la proporzione AO : DO :: OE : OB, che ha sempre luogo, diventa in questo caso AO : DO :: DO : OB. Dove si vede che

l'ordinata D O ad un diametro è media proporzionale tra le due ascisse prese sopra questo diametro. Questa proprietà è stata dimostrata altrimenti (168).

189. *Se da un punto* A *esterno al circolo* (Fig. 121), *si trovano due rette* AB, AD, *che tagliano ciascheduna la circonferenza in due punti, queste secanti saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne al circolo; cioè s' avrà* AB : AD :: AE : AC.

Condotte le corde BE, DC. I due triangoli ABE, ADC sono simili, per avere l' angolo A comune, ed i due angoli B e D che hanno i loro vertici alla circonferenza, e che appoggiano sopra un arco medesimo, sono eguali. Dunque si ha la proporzione AB : AD :: AE : AC.

190. Supponghiamo che la secante AB restando immobile, si faccia girare l' altra secante AD intorno del punto A, in modo che l' angolo BAD ingrandendosi continuamente, il punto D si venga finalmente a confondere con il punto E (Fig. 122). Allora AD diventa tangente al circolo, e si ha

AB : AD :: AD : AC. Da ciò apparisce, che *se da uno stesso punto si conduca una secante ed una tangente ad un circolo, la tangente è media proporzionale tra la secante intera e la sua parte esterna al circolo.*

191. Problema. *Tagliare una linea* MN (Fig. 123) *in media ed estrema ragione.*

Inalzate NO perpendicolare ad MN ed eguale alla metà di questa linea; tirate MO; prendete OP = ON, ed MQ = MP: la linea MN sarà divisa in media ed estrema ragione al punto Q, cioè si avrà MN : MQ :: MQ : QN. Perchè se dal punto O come centro, con il raggio ON o OP, si descrive il circolo PNR, e prolungasi MP fino in R, s'avrà la proporzione MR : MN :: MN : MP. Dunque (teoria delle proporzioni) MN : MP :: MR — MN : MN — MP. Ma MP = MQ, MR — MN = MR — PR = MP = MQ, MN — MP = MN — MQ = QN. Dunque MN : MQ :: MQ : QN. Dunque la retta MN è tagliata in media ed estrema ragione al punto Q.

192. *Se dall' angolo* A *d' un triango-*

lo ABC (Fig. 124, e 125) *si discenda un perpendicolare* AD *sopra il lato opposto* BC, *prolongato s' egli è necessario, s' avrà questa proporzione: la base* BC *sta alla somma* AB + AC *degli altri due lati, come la differenza* AB — AC *dei due stessi lati, sta alla differenza* BD — DC, *o alla somma* BD + DC, *dei segmenti della base, secondo che la perpendicolare* AD *casca in dentro, o in fuori del triangolo.*

Dal punto A come centro, e con il più gran lato adjacente AB per raggio, descrivo una circonferenza che incontri in O la base BC prolongata; protraggo CA da una parte e dall' altra fino alla circonferenza. Ciò posto, si ha BC : CM :: CN : CO. Ma CM = CA + AM = CA + AB, CN = AN — AC = AB — AC; di più, nella figura 124, CO = DO — DC = BD — DC, perchè DO = BD; e nella figura 125, CO = CD + DO = CD + BD. Quindi la proporzione BC : CM :: CN : CO diventa BC : AB + AC :: AB — AC : BD — DC (Fig. 124); BC : AB + AC :: AB — AC : BD + DC (Fig. 125).

193. *In qualunque quadrilatero* ABCD

(Fig. 126), *inscritto al circolo, il prodotto delle due diagonali* AC, BD, *è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti; cioè si ha* $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

Condotta dall'angolo A la retta AO, che faccia con il lato AB l'angolo BAO eguale all'angolo DAC, che fa l'altro lato AD con la diagonale AC. I due triangoli BAO, CAD, saranno simili, poichè oltre gli angoli eguali BAO, CAD, gli angoli ABD, ACD, che hanno i loro vertici alla circonferenza, e che s' appoggiano sopra uno stesso arco, sono eguali. Dunque si ha $AB : AC :: BO : CD$, e perciò $AC \times BO = AB \times CD$.

I due triangoli AOD, ABC, sono simili, poichè sottraendo dagli angoli eguali CAD, BAO, lo stesso angolo OAC, rimarranno gli angoli eguali DAO, CAB, e gli angoli ADO, ACB, che hanno i loro vertici alla circonferenza, e che s' appoggiano sopra un medesimo arco, sono eguali. Dunque s' avrà $AD : AC :: DO : BC$, e perciò $AC \times DO = AD \times BC$.

Aggiungendo quest'equazioni, mem-

bro a membro, con la precedente, s' avrà $AC\times BO+AC\times DO=AB\times CD+BC\times AD$, o sia $AC(BO+DO)=AB\times CD+BC\times AD$, o sia finalmente $AC\times BD=AB\times CD+BC\times AD$.

CAPITOLO VI.

Proprietà di certi poligoni in risguardo del circolo.

194. Problema I. *Circonscrivere un circolo ad un triangolo, e determinare il raggio di questo circolo per mezzo dei lati del triangolo.*

1.° Circonscrivere un circolo ad un triangolo ABC (Fig. 127, n.° 1), non è altro che far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati A, B, C: questo problema si risolve inalzando sopra le metà dei lati AB, AC, le perpendicolari MO, NO, che s' incontreranno in O, centro del circolo cercato.

2.° Conducendo il raggio OC, e abbassando dall' angolo A la perpendicolare AE sopra BC i due triangoli

rettangoli BEA, OKC, saranno simili; perchè gli angoli retti E e K sono eguali; gli angoli B ed O sono pure eguali per avere ciascuno l'arco CZ per misura. Quindi s'avrà questa proporzione AE : CK :: AB : OC $= \frac{AB \times CK}{AE}$. Ma in quest' espressione di OC tutto è cognito, o sia determinato per mezzo dei lati del triangolo; imperciocchè AB è uno dei suoi lati, CK è la metà del lato AC, e la perpendicolare AE si determina mediante i tre lati del triangolo.

195. Supponghiamo che il triangolo proposto sia equilatero (Fig. 127, n.° 2). Allora la perpendicolare AE passa per il centro, casca sopra la metà di BC; e si ha CK o CN $=$ CE $= \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$; $(AE)^2 = (AB)^2 - \frac{(AB)^2}{4} = \frac{3(AB)^2}{4}$, o sia AE $= \frac{AB \times \sqrt{3}}{2}$. Dunque OC o OA o OB $= \frac{AB}{\sqrt{3}}$: equazione che

esprime la relazione tra il lato del triangolo equilatero, ed il raggio del circolo circonscritto.

196. Problema II. *Descrivere un circolo che passi per i vertici dei tre angoli dati in un poligono dato.*

Si tratta di far passare una circonferenza di circolo per tre angoli F, B, D del poligono dato A B C D E F (Fig. 128): si rileva che non bisogna perciò far altro che unire i tre angoli proposti mediante le tre linee F B, F D, B D, e circonscrivere un circolo al triangolo F B D.

197. Problema III. *Inscrivere un circolo in un triangolo, o che ne tocchi i tre lati; e trovare il raggio di questo circolo, per mezzo dei tre medesimi lati.*

1.° Dividete i due angoli A e B del triangolo proposto A B C (Fig. 129), e ciascuno in due parti eguali con le rette AO, BO che s'incontrano in O; da questo punto O, abbassate le perpendicolari O M, O N, O K, sopra i tre lati del triangolo: queste tre linee saranno eguali, e perciò ciascheduna d'esse sarà il raggio del circolo cerca-

to. Di fatti, i due triangoli rettangoli AMO, ANO, sono perfettamente eguali, poichè i tre angoli di uno sono eguali ciascuno a ciascuno ai tre angoli dell'altro, e l'ipotenusa AO è comune: così OM=ON. Altronde i due triangoli rettangoli BMO, BKO, sono perfettamente eguali, ed OM=OK; dunque OM=ON=OK; e perciò descrivendo un circolo, con il raggio OM o ON o OK, si adempirà la prima condizione del problema.

2.° Avendo abbassata dall'angolo A la perpendicolare AE sopra l'opposto lato BC, è chiaro che il triangolo ABC essendo eguale alla somma dei tre triangoli OAB, OBC, OAC, s'avrà

$$\frac{BC\times AE}{2}=\frac{AB\times OM}{2}+\frac{BC\times OK}{2}+\frac{AC\times ON}{2}.$$

Da dove ricavasi (a cagione di OM=ON=OK), $OM=\frac{BC\times AE}{AB+BC+AC}$, nella qual'espressione tutto è cognito o sia determinato per mezzo dei lati del triangolo.

198. Problema IV. *Inscrivere un circolo che tocchi tre lati dati in un poligono dato.*

Volendosi, per esempio, che il circolo tocchi i tre lati A B, C D, G H del poligono ABCDEFGH (Fig. 130), si prolungheranno i lati AB, CD, GH, fintantochè s' incontreranno nei punti *a*, *b*, *c*; e la quistione sarà ridotta ad inscrivere un circolo nel triangolo dato *a b c*.

199. *Il lato* A B *dell' esagono regolare inscritto in un circolo* (Fig. 131) *è eguale al raggio di questo circolo.*

Condotti i raggi OA, OB. Nel triangolo A O B l' angolo O che ha per misura l' arco A Z B, sesta parte della circonferenza, ch' è di 60 gradi: quindi la somma dei due altri angoli *A* e B è di 120 gradi. Ma siccome OB = OA, questi due angoli sono eguali: dunque ciascheduno d' essi è di 60 gradi; dunque i tre angoli del triangolo AOB sono ognuno di 60 gradi, e perciò il triangolo è equilatero. Quindi A B = O A = O B.

200. *Il lato* A B *del decagono regolare inscritto in un circolo* (Fig. 132) *è eguale alla maggior parte del raggio*

tagliata in media ed estrema ragione.

Condotti i raggi O A, O B, e diviso l' angolo O B A in due parti eguali con la retta B M. Nel triangolo isoscele A O B, l' angolo O del vertice ha per misura la decima parte della circonferenza, o la quinta parte della semiperiferia. Dunque gli altri due angoli hanno ciascheduno per misura i $\frac{2}{5}$ della semiperiferia, e perciò sono ciascuno doppio dell' angolo O. Dunque, poichè l' angolo O B M è la metà dell' angolo O B A, risulta che il triangolo O M B è isoscele, o sia MO = M B.

Frattanto i due triangoli AOB, ABM, sono simili; perchè oltre l' angolo A comune, hanno pure i due angoli eguali A O B, A B M. Quindi s' avrà la proporzione O A : AB :: AB : AM. Ma per il triangolo isoscele A B M, si ha A B = B M; e similmente per il triangolo isoscele OMB, si ha BM = OM. Dunque la proporzione precedente diventa O A : O M :: O M : M A : e perciò OM è la parte maggiore del raggio O A tagliata in media ed estrema ragione. Dunque il lato A B è eguale

alla maggior parte del raggio tagliato in media ed estrema ragione.

201. *Il quadrato d'un lato* AB *del pentagono regolare* ABCDE (Fig. 133) *inscritto in un circolo, è eguale al quadrato del raggio, più il quadrato del lato del decagono; cioè conducendo dal punto* A *al punto* F, *mezzo dell' arco* AFB, *la corda* AF *che è il lato del decagono regolare, e tirando il raggio* OB, *si ha* $(AB)^2 = (OB)^2 + (AF)^2$.

Condotta la corda FB; per il punto Z, mezzo dell' arco AZF, condotto il raggio OZ che incontri AB al punto M, e tirata MF che sarà necessariamente eguale ad MA. I due triangoli isosceli AFB, AMF, che hanno un angolo comune alla base, sono simili; danno per ciò AB : AF :: AF : AM, proporzione dove si ricava $AB \times AM = (AF)^2$.

Nel triangolo isoscele AOB, l'angolo O del vertice, che ha per misura l'arco AFB, quinta parte della circonferenza, è di 72 gradi. Quindi ciascheduno dei due altri B ed A, ha per misura 54 gradi. Nel triangolo OMB,

l'angolo B è di 54 gradi; l'angolo C è pure di 54 gradi, e ciò per avere l'arco BFZ per misura, la di cui prima parte è di 36 gradi, e la seconda FZ è di 18. Dunque questo triangolo OMB è isoscele e simile al triangolo AOB. Perciò s' avrà la proporzione AB : BO :: BO : BM, o sia $(BO)^2 = AB \times BM$.

Aggiungendo membro a membro nelle due trovate equazioni, s'avrà $AB \times AM + AB \times BM = (AF)^2 + (OB)^2$, o sia $AB(AM + MB) = (AF)^2 + (OB)^2$, e finalmente $(AB)^2 = (AF)^2 + (OB)^2$.

CAPÍTOLO VII.

Metodo per trovare il rapporto prossimo della circonferenza del circolo con il diametro.

202. Problema I. *Conoscendo il raggio* CA *d' un cerchio* (Fig. 134), *ed il lato* AB *d' un poligono regolare che gli è iscritto; trovare l' espressione dell' apotema* CM *di questo poligono?*

La perpendicolare CM, divide il la-

to A B in due parti eguali. Quindi si ha $AM = \frac{AB}{2}$, ed $(AM)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$.
Il triangolo rettangolo AMC dà $CM = \sqrt{[(AC)^2 - (AM)^2]} = \sqrt{\left\{(AC)^2 - \frac{(AB)^2}{4}\right\}}$: espressione nella quale tutto è noto.

203. Problema II. *Conoscendo il raggio del circolo, ed il lato* A B *d' un poligono regolare iscritto: trovare il lato* O A *o* O B *del poligono regolare che ha due volte più di lati?*

Avendo determinato C M, pel problema precedente, sottraggo questa linea dal raggio C O, e con ciò conosco O M. Il triangolo rettangolo A M O dà $AO = \sqrt{[(AM)^2 + (MO)^2]}$: espressione nella quale tutto è noto, poichè A M è la metà di A B che è cognito.

204. Il lato O A essendo determinato, si moltiplicherà lo stesso pel numero dei lati del poligono al quale deve appartenere; il che darà il con-

torno di questo poligono; si cercherà il suo apotema, che si moltiplicherà per la metà del contorno: il che darà la superficie del poligono.

205. Problema III. *Conoscendo il lato* AB *d'un poligono regolare iscritto in un circolo: trovare il lato del poligono regolare circoscritto?*

Egli è chiaro, che essendo (Fig. 135) AB il lato del poligono iscritto, quello del poligono circoscritto è la retta ab che tocca l'arco AOB nel suo mezzo O, ed è determinata dai raggi CA, CB, prolungati. I triangoli simili CMA, COa, danno CM : CO :: AM : aO ::

$$\frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} :: AB : ab; \text{ dunque } ab = \frac{AB \times CO}{CM}:$$

espressione nella quale tutto è noto.

206. Problema IV. *Trovare il rapporto, almeno prossimo, della circonferenza del circolo al suo raggio o al suo diametro.*

1.° Osservo, che se s'iscrivono e circoscrivono al circolo due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati, ciascun arco di circolo è maggiore del lato del poligono iscritto, e mi-

nore del lato del poligono circoscritto. *Di* fatti, siano A B, *a b* due lati corrispondenti del poligono iscritto e del poligono circoscritto: primieramente l'arco A O B è maggiore della sua corda A B; da un altro canto, egli è evidente che il settore CAOBC è minore del triangolo rettilineo C*ab*, cioè a

dire, che si ha $\frac{AOB \times CO}{2} < \frac{ab \times CO}{2}$;

dunque {a motivo del fattore comune $\frac{CO}{2}$} si ha $AOB < ab$.

2.° Supponendo che la corda A B sia eguale al raggio C A, l'angolo C del triangolo equilatero C A B, avrà per misura la sesta parte della circonferenza, poichè la somma dei tre angoli di questo triangolo ha per misura la semicirconferenza; onde ne segue che si esaurisce per l' appunto l' intera circonferenza, coll' iscrivervi di mano in mano sei volte il raggio. Il poligono risultante è dunque un esagono regolare: perciocchè tutti i suoi lati so-

no eguali, e tutti i suoi angoli sono composti d'angoli eguali. Per mezzo del lato AB di questo poligono, noi calcoleremo in parti del raggio, il lato del poligono regolare di 12 lati; con questo il lato del poligono regolare di 24 lati; con questo il lato del poligono regolare di 48 lati; con questo il lato del poligono regolare di 96 lati; così di seguito. Potremo adunque accostarci continuamente in meno, alla circonferenza del circolo. Conoscendo il lato dell' ultimo poligono iscritto, cioè a dire, del poligono al quale ci fermiamo, si determinerà [205] il contorno dell' ultimo poligono regolare circoscritto che gli corrisponde. Tutte queste operazioni daranno i contorni di due poligoni, l'uno minore, l'altro maggiore della circonferenza. Se il numero de' loro lati è un poco considerabile, questi due contorni non differiranno molto l'uno dall' altro; e per conseguenza, prendendo la metà della loro somma, si avrà un numero che esprimerà ad un di presso la circonferenza in parti del raggio.

Archimede ha trovato, coll' iscrivere

e circoscrivere al circolo due poligoni regolari, ciascuno di 96 lati, che il diametro essendo espresso da 7, la circonferenza è espressa da un numero un poco minore di 22. ADRIANO MEZIO, Matematico Olandese, spingendo l'approssimazione più oltre, ha trovato che il diametro essendo espresso da 113, la circonferenza è espressa da un numero che è pochissimo minore di 355. Altri *Matematici* hanno date altre determinazioni più o meno prossime; ma niuno ha potuto ancora trovare il rapporto esatto e rigoroso della circonferenza al diametro o al raggio.

207. Le circonferenze de' circoli essendo tra loro come i raggi o i diametri, se dicasi 1 il diametro d'un circolo dato, π la sua circonferenza, R il raggio d'un altro circolo, C la sua circonferenza: si avrà $C = 2R \times \frac{\pi}{1}$.

Secondo il rapporto trovato da ARCHIMEDE, si ha $7 : 22 :: 1 : \pi$; dunque $\pi = \frac{22}{7}$; e $C = 2R \times \frac{22}{7}$. Secondo il

rapporto trovato da Mezio, si avrebbe $\pi = \frac{355}{113}$, e $C = 2R \times \frac{355}{113}$; così degli altri rapporti.

208. La superficie del circolo che ha per raggio R, e per circonferenza C, essendo $\frac{C \times R}{2}$, avrà per valore πR^2. Laonde si vede che, *per avere la superficie d' un circolo, bisogna moltiplicare il quadrato del raggio pel rapporto della circonferenza al diametro.*

209. Se fosse nota la superficie d' un circolo, e si dovesse trovarne il raggio, si avrebbe (chiamando S la superficie data) $S = \pi R^2$; dunque... $R^2 = \frac{S}{\pi}$, ed $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

CAPITOLO VIII.

Alcune quistioni risguardanti i massimi ed i minimi nelle figure geometriche.

210. Vi sono delle quantità che vanno aumentando o diminuendo senza fine: della prima specie sono i termini della progressione geometrica ascendente ÷ 1 : 2 : 4 : 8 : ec.; della seconda sono i termini della progressione geometrica decrescente ÷ 27 : 9 : 3 ; 1 : $\frac{1}{3}$; ec. Ma vi sono altre quantità (e queste sono quelle che fanno il soggetto di questo capitolo) che dopo essere aumentate fino ad un certo punto, vanno poscia diminuendo, o che dopo d' avere diminuito vanno in seguito aumentando. Sia per esempio, il semicircolo AOB (Fig. 136), di cui AB è il diametro: le ordinate MP vanno aumentando da A fino in O, poscia diminuendo da O fino in B; la più grande di queste ordinate è il raggio OC. Al contrario se si conduce

la retta E D parallela al diametro AB, e terminata dalle perpendicolari A E, B D; le rette M Q vanno diminuendo da A fino in O, indi aumentando da O fino in B; la più piccola di queste linee è la O R che casca sopra il raggio C O prolungato.

Una quantità che tra tutte quelle della sua specie è *la più grande*, o la *più piccola* possibile, chiamasi un *massimo* o un *minimo*.

211. Due figure che hanno i contortorni o perimetri eguali si chiamano *figure isoperimetre*.

212. *Di tutti i rettangoli*, $AC \times CB$, $AD \times DB$ (Fig. 137), *che si ponno costruire sopra le due parti d' una linea* AB *come lati contigui ad uno stesso angolo, il più grande, o sia il* MASSIMO, *è il quadrato, cioè il rettangolo di cui i lati* AC, CB, *sono eguali*.

Il punto C essendo la metà di AB, si avrà $(AC)^2 - (CD)^2 = AD \times DB$. Quindi apparisce, che il quadrato $(AC)^2$ sorpassa il rettangolo $AD \times DB$ del quadrato $(CD)^2$, perciò tra tutti i rettangoli che si ponno formare con le due parti d'una linea il quadrato $(AC)^2$ è un *massimo*.

213. Dunque fra tutti i rettangoli isoperimetri, il quadrato ha la più grande superficie. Intendo dire che avendosi un quadrato A C B M (Fig. 138), ed un rettangolo A D B M (Fig. 139), che abbiano dei perimetri eguali, la superficie del quadrato è più grande di quella del rettangolo. Imperciocchè, indicando per la stessa linea AB (Fig. 138) la metà del perimetro del quadrato o del rettangolo, e rappresentando le stesse linee per le medesime lettere nelle tre figure, si avrà per l'articolo precedente $(AC)^2 > AD \times DB$.

214. Problema I. *Trovare sopra la base* AB *d'un triangolo dato* A G B (Fig. 140) *un punto* C *tale che abbassando sopra i due altri lati* GA, GB *le perpendicolari* CK, CH, *il rettangolo* $CK \times CH$ *sia un massimo*.

Il punto cercato è il mezzo di AB, in modo che se da qualunque altro punto D si abbassi sopra GA, GB, le perpendicolari DF, DE, si avrà $CK \times CH > DF \times DE$; perchè i triangoli simili ACK, ADF, danno AC : AD :: CK : DF; ed i triangoli simili BCH, BDE, danno CB o AC : BD ::

CH : DE. Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, s'avrà $(AC)^2$: $AD \times DB$ :: $CK \times CH$: $DF \times DE$. Ma essendo il punto C mezzo di AB, si ha $(AC)^2 > AD \times DB$. Dunque ancora $CK \times CH > DF \times DE$.

215. Problema II. *Inscrivere in un triangolo* GAB (Fig. 141) *il più gran rettangolo possibile*.

La quistione si riduce a trovare sopra uno dei lati AB d'un triangolo proposto un punto C tale, che condotta CK perpendicolare, e CH parallela al lato GA, poscia HM parallela a CK, il rettangolo CKMH o $CK \times CH$ sia più grande di qualunque altro rettangolo DFNE o $DF \times DE$, che si formerebbe conducendo da qualunque altro punto D la retta DF perpendicolare, la retta DE parallela ad AG, e la retta EN parallela a DF. Ma il punto cercato è il mezzo C di AB; dimostrandosi questo come nell' articolo precedente, osservando cioè che i due triangoli ACK, ADF sono simili, come pure i due triangoli BCH, BDE. Da ciò risulta la proporzione composta $(AC)^2$: $AD \times DB$ :: $CK \times CH$:

DF×DE; dalla quale si rileva che essendo C il punto di mezzo di AB, il rettangolo CK×CH è un *màssimo*.

216. Problema III. *Due punti* A *e* B (Fig. 142) *essendo dati fuori d' una linea* MN, *trovare sopra questa linea un punto* C *tale, che condotte le rette* AC, CB, *la loro somma* AC+CB *sia un* minimo.

Dal punto A discendo sopra MN la perpendicolare AK, che prolungo della quantità KH=KA; dal punto H e B tiro la retta HCB che incontra MN al punto cercato C; talchè condotta la retta CA, la somma AC+CB è un *minimo*. Di fatti condotta da un altro punto D preso sopra MN le rette DA, DB, e tirata DH. La retta AH essendo perpendicolare ad MN, reciprocamente MN sarà perpendicolare ad AH, Dunque essendo KH=KA, s' avrà CA=CH, DA=DH. Dunque AC+CB=HB, ed AD+DB=DH+DB. Ma HB<DH+DB; così pure AC+CB<AD+DB.

217 Essendo i due triangoli rettangoli AKC, HKC, perfettamente eguali, gli angoli ACK, HCK, sono

eguali. Ma l'angolo HCK = l'angolo BCD; dunque i due angoli ACK, BCD, che formano le linee AC, BC, con la retta MN sono eguali, quando AC + CB è un *minimo*.

218. *Di tutti i triangoli* AMB, ANB (Fig. 143), *che hanno per base una medesima corda* AB *d' un circolo, ed i loro vertici alla circonferenza, posti da una stessa parte, il triangolo isoscele* AMB *ha la* massima *superficie*.

Dai punti M ed N abbassate le perpendicolari MO, NP, sopra di AB; è chiaro, che la più grande di queste perpendicolari è la MO, che corrisponde al mezzo M dell' arco AMB, o che essendo prolungata, passerebbe per il centro C del circolo. Da ciò risulta, che il prodotto $\frac{AB \times MO}{2}$ o sia la superficie del triangolo isoscele AMB è un *massimo*.

219. *Di tutti i triangoli* AMB, ANB, *il triangolo isoscele* AMB *è quello di cui la somma dei lati* MA, MB *è un* massimo; *cioè* MA + MB > NA + NB.

Prolungate BN della quantità $NX = NA$, e tirate le rette MX, MN. Nei due triangoli MNA, MNX, il lato MN è comune; il lato $NA = NX$; i due angoli MNA, MNX, compresi fra lati eguali, sono eguali, poichè il primo ha per misura la metà dell' arco AZBM, il secondo ha per misura la metà dell' arco MAZB, ed i due archi AZBM, MAZB sono eguali, a cagione del triangolo isoscele AMB, e della parte comune AZB. Dunque i due triangoli MNA, MNX sono perfettamente eguali: quindi $MX = MA = MB$. Dunque $MA + MB = MX + MB$, ed $NA + NB = NX + NB = XB$. Ma $MX + MB > XB$; dunque $MA + MB > NA + NB$.

220. *Di tutti i triangoli isoperimetri* ACB, ADB (Fig. 144), *che hanno la stessa base* AB, *quello che ha la* massima *superficie è il triangolo isoscele* ACB.

Condotta dal vertice C del triangolo isoscele ACB la retta MN parallela ad AB. Gli angoli ACM, BCN, sono evidentemente eguali, e la somma $AC + CB$ delle due linee AC, BC

è minore della somma AR + RB delle due linee condotte da un altro punto R, preso sopra MN, ai punti A e B (216, e 217). A maggior ragione la somma CA + CB sarebbe minore di RA + RB, se il punto R fosse posto al di sopra di MN. Dunque siccome DA + DB = CA + CB, il punto D è necessariamente posto al disotto di MN, cioè nello spazio compreso fra le due parallele AB, MN. Quindi, se dal punto C si abbassi CO perpendicolare ad AB, e che dal punto D si conduca parallelamente ad AB o MN la retta DQ che incontra CO in Q, s'avrà CO > QO. Ma essendo CO, QO, le altezze dei due triangoli ACB, ADB, che hanno la medesima base AB, ne risulta, che la superficie del primo, cioè $\frac{AB \times CO}{2}$ è un *massimo*.

221. *Se un triangolo rettangolo* ABC *ed un altro triangolo* ABD (Fig. 145) *hanno la stessa base* AB, *ed il lato* BC *eguale al lato* BD, *la superficie del primo triangolo è più grande di quella del secondo*.

Dal punto D condotta parallelamente ad AB la retta DQ, che incontra BC al punto Q. L'angolo ABC essendo retto, le linee BC, BQ, sono le altezze dei due triangoli ABC, ABD. Ma nel triangolo rettangolo BQD il lato BQ è minore dell'ipotenusa BD: dunque, per essere BD = BC, s'avrà BQ < BC. Quindi $\frac{AB \times BC}{2}$ o sia la superficie del triangolo rettangolo ABC, è più grande di $\frac{AB \times BQ}{2}$ o sia la superficie del triangolo ABD.

222. *Di tutti i poligoni inscritti in un medesimo circolo, e d'uno stesso numero di lati, quello* ABCDEF (Fig. 146), *di cui la superficie è massima, ha tutti i suoi lati eguali.*

Condotta la diagonale AE; e da un punto qualunque O dell'arco AFE, tirate le corde OA, OE. La superficie del poligono ABCDEF essendo *massima*, bisogna necessariamente che la superficie del triangolo AFE sia più grande di quella del triangolo AOE;

imperciocchè se la superficie del triangolo A O E eguagliasse o sorpassasse quella del triangolo A F E, la superficie del poligono A B C D E F non sarebbe un *massimo*, poichè essa sarebbe eguagliata o sorpassata da quella del poligono A B C D E O; lo che è contro l' ipotesi. Ma i due triangoli AFE, AOE essendo iscritti nello stesso circolo, e avendo la stessa base AE, quello che ha la più gran superficie è il triangolo isoscele AFE. Quindi nel poligono A B C D E F di cui la superficie è un *massimo*, il lato EF=FA. Si dimostrerà lo stesso (conducendo le diagonali F B, A C, B D, C E, che F A = A B; che A B = B C; così di seguito, qualunque sia il numero dei lati del poligono. Dunque ec.

223. Il poligono inscritto al circolo, e di cui tutti i lati sono eguali, ha pure evidentemente tutti i suoi angoli eguali, e perciò è regolare. Così di tutti i poligoni inscritti in uno stesso circolo, e d' uno stesso numero di lati, quello che ha la più grande superficie è il poligono regolare.

224. *Di tutti i poligoni isoperimetri*

e d'uno stesso numero di lati, quello ABCDEF (Fig. 147), *che ha la superficie* massima, *ha tutti i suoi lati eguali*.

Condotta la diagonale AE, e formato il triangolo AOE isoperimetro al triangolo AFE, e avente la stessa base AE. La superficie del poligono ABCDEF essendo *massima*, e perciò più grande di quella del poligono ABCDEO, è chiaro che a cagione della parte comune ABCDE la superficie del triangolo AEF è pure *massima* nel suo genere, o sia più grande della superficie del triangolo AOE. Dunque il triangolo AFE è isoscele, cioè si ha FE = FA. Si dimostrerà ancora (conducendo le diagonali FB, AC, BD, CE) che FA = AB, AB = BC, BC = CD, CD = DE, e così di seguito se il poligono avesse un maggior numero di lati. Dunque ec.

225. *Il circolo è maggiore d' ogni poligono isoperimetro*.

Si è già provato, che di tutti i poligoni isoperimetri e d' un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il più grande; onde non si tratta che

di paragonare il circolo ad un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia AI (Fig. 148) il mezzo lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l'angolo DOE = ACI, e perciò l'arco DE uguale al mezzo lato AI. Il poligono P starà al circolo C come il triangolo ACI sta al settore ODE, o $P : C :: \frac{AI \times CI}{2} : \frac{DE \times OE}{2} :: CI : OE$. Sia condotta al punto E la tangente EG; i triangoli simili ACI, GOE, daranno la proporzione CI : OE :: AI o DE : GE; dunque P : C :: DE : GE, o come $DE \times \frac{1}{2} OE$ che è la misura del settore DOE sta a $GE \times \frac{1}{2} OE$ che è la misura del triangolo GOE: ora il settore è minore del triangolo; dunque P è minore di C; dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

PARTE TERZA

Dei solidi.

226. Qualunque spazio rinchiuso da tutte le parti da delle superficie che s' incontrano, chiamasi *corpo* o *solido*.

Quando tutte le faccie che circondano un corpo sono poligoni rettilinei piani, chiamasi in generale poliedro; e prende specialmente il nome di *tetraedro*, *pentaedro*, *esaedro*, *eptuedro*, *ottaedro*, *ennaedro*, *decaedro*, *endecaedro*, *dodecaedro*, ec. secondo che è terminato da 4, da 5, da 6, da 7, da 8, da 9, da 10, da 11, da 12, ec. faccie.

Un poliedro di cui tutte le faccie sono poligoni regolari, eguali e similmente situati nello spazio, forma ciò che chiamasi *un corpo regolare*, o *un poliedro regolare*.

227. L' oggetto di questa terza parte è d' insegnare a misurare le superficie e le solidità dei corpi terminati da delle figure rettilinee o circolari. Faremo ancora lo stesso in risguardo della sfe-

ra, che è fra i solidi quello che è il circolo fra i poligoni.

Siccome avremo bisogno nelle ricerche indicate, di più proprietà dei piani, tanto considerati in se stessi, come in risguardo di certe linee, o altri piani; così comincieremo a notare le teorie le più esenziali dei piani.

CAPITOLO I.

Dei piani.

228. Una linea retta AB (Fig. 149) dicesi perpendicolare al piano FCE, quando con tutte le linee BF, BD, BC, BE tirate dal suo termine B in detto piano, faccia gli angoli retti ABF, ABD, ABC, ABE.

229. Il piano HIE dirassi perpendicolare al piano FCE, se qualunque retta AB, condotta in uno di essi piani perpendicolare alla comune sezione GE di ambidue i piani riesca pure all' altro piano FCE perpendicolare.

230. L' inclinazione della retta AD (Fig. 150) al piano FCE è l' angolo

ADB, che risulta, se da un puntò sublime A di essa linea, tirata la perpendicolare AB sopra esso piano, si tirerà nel medesimo piano la retta BD, che congiunge i termini d'ambedue queste linee.

231. L'inclinazione del piano GFCH (Fig. 151) al piano FCE è l'angolo acuto ADB compreso da due rette linee DA, DB tirate dal medesimo punto D della comune sezione FC di ambi i piani, in ciascuno di essi perpendicolare alla stessa sezione di maniera che sieno retti gli angoli ADC, BDC.

232. Due piani si diranno ugualmente, o similmente inclinati, come due altri piani, quando l'angolo dell'inclinazione de' due primi sarà uguale all'angolo dell'inclinazione degli altri.

233. Piani tra loro paralleli sono quelli, che in infinito continuati mai non converrebbero insieme.

Proposizioni generali sopra la teoria dei piani.

234. *Di una linea retta non può essere una parte in un piano, ed un' al-*

tra parte elevata dal medesimo piano:

Imperciocchè non è possibile, che della linea retta A D B (Fig. 152) una parte B D sia nel soggetto piano E C F, e la parte A D in un piano elevato: altrimenti prolungata la B D verso G nello stesso piano, converrebbero due rette linee G B, A D B in una porzione comune D B; il che è impossibile: dunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, e parte in un altro elevato da esso.

235. *Se due linee rette si segano, stanno in un medesimo piano; e ancora qualunque triangolo consiste in un piano stesso.*

Le linee rette AB, CD (Fig. 153) si seghino nel punto E; dico che sono in un piano, e che ogni triangolo DEB consiste in un piano.

Imperocchè se la parte F E G del triangolo EDB fosse in un piano, ed il resto FDBG in un altro; della retta ED la parte EF sarebbe in un piano, e l'altra parte F D fuori di esso sarebbe elevata, il che è impossibile. Dunque il triangolo D E B è in uno stesso piano, e così ancora le rette

ED, EB sono in esso, nè le rimanenti CE, AE possono essere sollevate dal medesimo piano; e però le rette AB, CD, che si segano, stanno in un medesimo piano.

236. *Se due piani si segano, la loro comune sezione è una linea retta.*

Siano i due piani ABG, ECF (Fig. 154) che si seghino: dico, che la loro comune sezione HD è una linea retta.

Altrimenti si potrà tirare nel piano ABG la retta HKD, e nell' altro ECF la retta HID, le quali due rette linee comprenderebbero spazio, il che è impossibile; dunque la comune sezione è la retta linea HD.

237. *Se una linea retta è perpendicolare a duè linee rette che si segano, sarà ancora perpendicolare al punto che passa per dette linee.*

Sia la retta AB (Fig. 155) perpendicolare alle due CD, EF, nel punto B in cui si segano: dico, che sarà ancora perpendicolare al piano che passa per le CD, EF.

Si tiri per lo stesso punto B un' altra linea GBH, e posta la BC uguale

alla BD, e la BF uguale alla BE, si congiungono le rette CE, FD, seganti la retta HG ne' punti G, H; indi da un punto superiore A della retta AB si tirino le rette AC, AE, AF, AD, AG, AH. Ne' triangoli CBE, DBF, essendo intorno l' angolo uguale al vertice B ancora i lati CB, BE uguali a' lati DB, BF, sarà la base CE uguale alla base DF, e gli altri angoli uguali; e però ne' triangoli CBG, DBH, essendo l' angolo BCG uguale al BDH, e l' angolo CBG uguale al DBH, ed il lato CB=BD; sarà ancora il lato CG=DH, e l' altro BG=BH. Similmente ne' triangoli CAB, DAB essendo la CB=BD, ed il lato AB comune, e gli angoli retti in B uguali, sarà la base AC=AD; e con simil ragione si proverà ne' triangoli ABE, ABF, essere l' AE=AF. Dunque ne' triangoli ACE, ADF essendo ciascun lato dell' uno uguale a ciascun lato dell' altro, saranno ancora gli angoli corrispondenti ACE, ADF uguali; onde ne' triangoli ACG, ADH, vi sono i lati AC, AD, ed i lati CG, DH, uguali intorno a' detti angoli

uguali A C G, A D H; e però la base A G uguale all' A H; e finalmente ne' triangoli A G B, A H B essendo tutti i lati dell' uno uguali a tutti i lati dell' altro, cioè B G = B H, ed A B comune, ed A G = A H; perciò l' angolo A B G è uguale ad A B H; i quali dunque sono retti; onde la linea A B con tutte le linee condotte per lo punto B nel piano, che passa per le rette C D, E F, facendo angoli retti, è perpendicolare a detto piano.

238. *Se una retta è perpendicolare nella comune intersezione a tre linee rette che si toccano, queste tre linee saranno in un medesimo piano.*

Sia l' A B (Fig. 156) perpendicolare alle tre rette B C, B D, B E nel punto B comune ad esse: dico essere queste nello stesso piano.

Altrimenti il piano che passa per le due B C, B D segherebbe il piano condotto per le due A B, B E in un' altra retta B F, comune sezione di entrambi; onde la retta A B, che è perpendicolare alle due B C, B D, farebbe angolo retto ancora colla B F esistente nello stesso piano C B D; dunque nel

piano ABF sarebbe l'angolo retto EB A uguale al retto FBA, la parte al tutto; il che è impossibile. Dunque la BE era nello stesso piano dell' altre due BC, BD, e non sollevata da esso.

239. *Se due rette linee sono perpendicolari ad un piano, saranno fra loro parallele.*

Siano le due rette AB, CD (Fig. 157) perpendicolari al piano BED: dico che le AB, CD sono parallele fra loro.

Congiungasi la BD, e ad angolo retto ad essa si tiri nello stesso piano la DE uguale all' AB, e si congiungano le rette BE, EA, AD. Essendo intorno agli angoli retti ABD, BDE il lato AB = ED, ed il lato BD comune, sarà la base AD = BE; dunque ne' triangoli ADE, ABE essendo AD = EB, DE = BA, e la base AE comune, l' angolo ADE = ABE, cioè retto; onde la ED facendo angolo retto colle tre linee BD, AD, CD, però queste sono in un medesimo piano: ma nel piano delle due BD, AD è ancora l'AB, che fa con esse un triangolo; dunque le due rette AB, CD sono in un medesimo piano: ed essendo i due angoli

interni A B D, C D B retti, esse linee sono parallele.

240. *La retta che congiunge due punti di due linee parallele, è nel medesimo piano di esse.*

Sia la retta linea AC (Fig. 158) che congiunga i due punti A, C delle due rette parallele A B, C D: dico esser l'AC nello stesso piano delle AB, CD. Perchè se si sollevasse in un altro piano, come l'AEC, questo continuato segherebbe il piano delle parallele nella retta A C; dunque due rette linee AEC, AC comprenderebbero spazio; il che è impossibile.

241. *Essendo due rette parallele, se una di esse è perpendicolare ad un piano, ancora l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano.*

Sia delle rette parallele A B, C D, (Fig. 157) la A B perpendicolare al piano B E D: dico che anche la C D sarà perpendicolare al piano medesimo.

Si faccia la costruzione, come nel §. 139, e con la stessa dimostrazione si proverà essere angoli retti gli E D A, A B E; quindi la E D è perpendicolare al piano di esse parallele, onde an-

cora è retto l'angolo CDE: ma anche l'angolo CDB è retto, essendo l'angolo ABD dell'altra parallela pur retto; dunque ancora la CD è perpendicolare allo stesso piano.

242. *Le linee rette, che sono parallele ad una terza, posta fuori del loro piano, saranno pure parallele tra loro.*

Le linee rette AB, CD (Fig. 159) sieno parallele alla EF, non esistente con essa nello stesso piano: dico che la AB è parallela alla CD.

Piglisi nella retta EF un punto G; da cui nel piano delle due parallele AB, EF, si tiri la perpendicolare GH, e nel piano delle parallele EF, CD la perpendicolare GI. Essendo gli angoli EGH, EGI retti, è la EG perpendicolare al piano HGI; dunque ancora le AB, CD parallele alla EG sono allo stesso piano perpendicolari, e però sono tra loro parallele.

243. *Se due rette concorrenti in un punto sono parallele a due altre convenienti in un punto, fuori del medesimo piano, faranno angoli uguali.*

Siano le due rette AB, CB (Fig. 160), concorrenti in B, parallele alle DE,

F E, che convengono in E, fuori del piano A B C: dico che fanno gli angoli A B C, D E F eguali.

Pongasi l' E D = B A, ed E F = B C; tirate le rette A D, B E, C F saranno uguali, e parallele: dunque ancora congiunte le due A C, D F riescono uguali; onde tutti i lati del triangolo A B C uguagliando i lati dell' altro D E F, sarà l'angolo A B C = D E F.

244. Problema I. *Da un punto sublime tirare una retta perpendicolare al soggetto piano.*

Sia A (Fig. 161) il dato punto sublime: bisogna dal punto A tirare una perpendicolare al soggetto piano.

Si tiri in esso piano qualunque retta G D, a cui dal punto A si mandi la perpendicolare A C. e alla stessa G D si alzi dal punto C la perpendicolare C B nel medesimo piano; indi sopra la C B dal punto A si tiri la perpendicolare A B: sarà questa perpendicolare al soggetto piano. Imperocchè tirata pel punto B la F B E parallela alla G D, siccome la G C facendo angolo retto colla C A, e colla C B, è perpendicolare al piano A C B, così ancora la E B

sarà perpendicolare al medesimo piano: dunque l' angolo ABF, e l' angolo ABC sono retti, e però l' AB è perpendicolare al soggetto piano.

245. Problema II. *Da un punto posto in un piano alzare una perdendicolare al detto piano.*

Sia EFG (Fig. 162) il dato piano, e C il punto dato in esso: bisogna dal punto C alzare una perpendicolare al piano E F G.

Da qualunque sublime punto A si tiri al piano E F G la perpendicolare A B, e congiunta la B C, si tiri nel piano A B C la C D parallela all' A B; questa sarà pure perpendicolare al piano E F G.

246. *Da un medesimo punto non possono essere alzate ad un piano due perpendicolari verso la medesima parte.*

Sia il piano E F G (Fig. 163): dico che dal medesimo punto B in esso piano non si possono alzar due perpendicolari al detto piano.

Perchè il piano, che passa per le due A B, C B, segando il piano soggetto E F G nella retta B D, sarebbero u-

guali gli angoli A B D, C B D, perchè retti, cioè la parte al tutto; il che è impossibile.

247. *Se una retta è perpendicolare a due piani, questi saranno paralleli.*

La retta linea AB (Fig. 164) sia perpendicolare ai due piani C D, E F: dico essere questi paralleli.

Imperciocchè se prolungati convenissero in una retta linea H G, preso in essa un punto I, e condotte in ambi i piani le rette IA, IB, si farebbe un triangolo, in cui due angoli B A I, A B I, sarebbero due retti; il che è impossibile: dunque essi piani sono paralleli.

248. *Se due rette linee congiunte in un punto, sono parallele a due linee poste in un altro piano; questi due piani saranno paralleli.*

Le due rette linee A G, A D (Fig. 165) congiunte nel punto A, siano parallele alle due E F, E C, congiunte nel punto E, e non però nel medesimo piano: dico, che i piani che passano per le A G, A D, E F, E C, sono paralleli.

Conducasi dal punto A sopra il pia-

no CEF la perpendicolare AB, e si tirino in esso piano le rette BI, BH, parallele alle EF, EC, e conseguentemente parallele alle AG, AD. Dunque essendo retti gli angoli ABI, ABH, saranno pure gli angoli BAG, BAD retti, e però l'AB sarà perpendicolare ancora al piano DAG; dunque sono questi due piani paralleli.

249. *Se due piani paralleli sono segati da un altro piano, le loro comuni sezioni sono due rette parallele.*

Li due piani paralleli AB, CD, (Fig. 166) siano segati da un altro piano HEGF; e le comuni loro sezioni siano le EH, GF: dico che le EH, GF sono parallele.

Imperocchè, se prolungate convenissero in I, sarebbero parte ne' piani paralleli, e parte fuori di essi (perchè ivi non convengono i piani equidistanti); il che è impossibile: dunque tali comuni sezioni sono parallele.

250. *Se due rette sono segate da piani paralleli, saranno da essi tagliate proporzionalmente.*

Le due rette AEB, CFD (Fig. 167)

siano segate dai piani paralleli HI, KL, MN ne' punti A, E, B, C, F, D: D: dico che AE: EB :: CF: FD.

Si tiri nel piano HI la retta AC, nel piano MN la BD, e congiunta la CB seghi il piano KL in G, indi si tirino in esso le rette GE, GF. Il piano del triangolo ACB ha li comuni segamenti AC, EG de' piani paralleli, tra loro paralleli (precedente paragrafo); e similmente il triangolo CBD fa le sezioni GF, BD parallele: dunque sarà AE: EB :: CG: GB :: CF: FD; onde sono proporzionalmente segate le rette AB, CD da essi piani paralleli.

251. *Se una retta è perpendicolare ad un piano, ancor qualunque piano, che passi per essa linea sarà perpendicolare al piano medesimo.*

La retta AB (Fig. 168) sia perpendicolare al piano CD: dico, che qualunque piano EF passi per essa linea sarà perpendicolare al piano CD.

Sia la EG la comune sezione di detti piani, e da qualunque punto H di essa si tiri nel piano EF la HI parallela all' AB. Sarà questa pure al

piano CD perpendicolare: dunque esso piano EF sarà perpendicolare al piano CD.

252. *Se due piani perpendicolari al soggetto piano si seghino; sarà la loro comune sezione perpendicolare al soggetto piano.*

Li due piani CGD, EHF, (Fig. 169) perpendicolari al piano GKH si seghino nella retta AB: dico essere l'AB perpendicolare al piano GKH.

Imperocchè la AB sarà perpendicolare alle due comuni sezioni EH, GD di essi piani EF, CD col piano soggetto EK; altrimenti se nel piano EF fosse la BL perpendicolare alla EH, e nell'altro CD fosse la BI perpendicolare alla GD, sarebbero le BL, BI, perpendicolari al piano EK, il che si è dimostrato impossibile (246): dunque la comune sezione AB è perpendicolare al soggetto piano EK.

Degli angoli solidi.

253. *Angolo solido* è l'inclinazione di più di due linee non poste nel medesimo piano, e concorrenti in un

medesimo punto; o pure, è il concorso di più di due angoli piani non posti nel piano medesimo, e terminati in un solo punto.

254 *Se un angolo solido è contenuto da tre angoli piani, due di essi saranno maggiori del rimanente.*

L'angolo solido A B D C (Fig. 170) sia contenuto dai tre angoli piani BAD, BAC, DAC: dico, che due di essi, presi in qualsivoglia modo, sono maggiori del rimanente.

Quando fossero tutti e tre uguali, è manifesto, essere due maggiori del terzo: ma se sono disuguali, sia BAC il maggiore, da cui si levi l'angolo BAE uguale al BAD; e tirata la retta BEC, posta l'AD=AE, si congiungano le BD, CD. Essendo ne' triangoli BAE, BAD, intorno agli angoli uguali al punto A, il lato AB comune, e l'AE=AD, sarà ancora la base BE=BD: ma le BD, DC sono maggiori della BC, dunque la DC è maggiore della EC; onde nei triangoli EAC, DAC essendo il lato AC comune, e l'AE=AD, ma la base EC<DC, sarà l'angolo EAC<DAC; e però

essendo l' angolo B A E = B A D, sono li due B A D, D A C maggiori del terzo B A C.

255. *Qualunque angolo solido è compreso da angoli piani minori di quattro retti.*

Sia l' angolo solido A (Fig. 171) compreso dagli angoli piani BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB: dico che questi angoli sono minori di quattro retti.

Si taglino i lati dell' angolo solido con un piano B C D E F G, che sarà base della *piramide*, e opposto al vertice A, e preso in essa base qualunque punto I, si congiungano le rette I B, I C, I D, I E, I F, I G. Essendo tanti i triangoli, che da' lati della base si alzano al vertice A della piramide, quanti i triangoli da' medesimi lati convergenti al punto I preso dentro la base: perciò tutti gli angoli che sono in quelli, uguagliano tutti gli angoli di questi, i quali comprendono tutti gli angoli del poligono di essa base insieme con i quattro retti, che sono intorno al punto I: ma essendo gli angoli B G A, A G D maggiori del

BCD, e così li due CDA, ADE maggiori del CDE, ec., sono tutti gli angoli adiacenti a' lati del poligono, ne' triangoli esterni concorrenti nel punto A, maggiori degli angoli adiacenti ad essi lati ne' triangoli interni della base concorrenti al punto I; dunque gli angoli rimanenti de' triangoli esterni, che compongono l' angolo solido A, sono minori degli angoli, che hanno intorno al punto I i triangoli interni della base; e però essendo questi uguali a quattro retti, quelli ne sono minori.

256. *Se sieno di tre angoli piani due qualsivoglia maggiori del terzo, e contenuti da rette tutte eguali; con le basi, che congiungono i termini, si potrà costruire un triangolo.*

Siano li tre angoli piani BAC, CAD, DAE (Fig. 172), due dei quali presi in qualsivoglia modo siano maggiori del rimanente, cioè gli angoli BAC, CAD maggiori dell' angolo DAE, li CAD, DAE maggiori del BAC, e li BAC, DAE maggiori del CAD; e siano uguali le rette AB, AC, AD, AE; e si uniscano le BC, CD, DE:

dico che da rette uguali alle BC, CD, DE′ si potrà costruire un triangolo, cioè che due delle BC, CD, DE′ sono maggiori della rimanente.

I termini B, C, D, E di quelle rette eguali sono in un arco circolare, il cui centro A; e delle basi suddette saranno sempre due maggiori della rimanente; perchè se si dubitasse, essere le due BC, CD maggiori dell' altra DE, si congiunga la BD. Per essere i due angoli BAC, CAD, cioè l'angolo BAD maggiore dell'altro DAE, ed i lati uguali, la base BD > DE: ma le due BC, CD sono maggiori della BD; dunque sono ancora maggiori della DE; però delle tre linee BC, CD, DE riuscendo sempre due maggiori della terza, se ne può fare un triangolo.

257. Problema. *Dati tre angoli come nella proposizione precedente, i quali però sieno minori di quattro retti, farne un angolo solido.*

Sieno dati li tre angoli piani BAC, CAD, DAE (Fig. 173), i quali sieno minori di quattro retti, e due di essi presi in qualsivoglia modo siano mag-

giori del rimanente: bisogna da angoli uguali ai BAC, CAD, DAE, costruire un angolo solido.

Delle loro basi BC, CD, DE congiunte a' termini de' lati uguali di detti angoli se ne faccia un triangolo FGH, e gli si circoscriva un cerchio, il cui raggio FI sarà minore del lato AB; perchè se gli fosse uguale, essendo nel cerchio BDE inscritte le due basi BC, CD, sarebbe all'altra DE=BD, essendo il cerchio del raggio AB circoscritto al triangolo delle tre linee BC, CD, DE: ma si è provata la BD>DE; dunque la FI non può essere uguale all'AB. Nè meno può essere la FI maggiore della BA, o della CA; perchè prolungata la CA in L, e fatta la CL=FI, se col raggio CL si descrivesse l'arco circolare MCN, ed in esso si adattasse la CM=CD, e la CN=CB, congiunta la MN; questa dovrebbe essere uguale alla DE: ma per essere l'angolo NCM maggiore del BCD, ed il lato CN=CB, e CM=CD, la base MN sarà maggiore della BD; dunque sarebbe ancora maggiore della DE; pertanto l'FI

debbe essere minore dell' AB, e degli altri lati AC, AD, AE uguali; onde $(AB)^2 > (FI)^2$: si ponga dunque nel centro I del circolo FGH perpendicolare al piano di esso circolo la retta IK, il di cui quadrato uguali l' eccesso del quadrato della AB sopra il quadrato della IF: dunque congiunte le rette FK, GK, HK, sarà ciascuna eguale a' lati AB, AC, AD, essendo il quadrato della FK uguale ai quadrati delle FI, IK, il quale è l' eccesso del quadrato della AB, ovvero della AC, sopra il quadrato della FI; onde la FK è uguale all' AB, e così la HK è uguale all' AC, e la KG è uguale all' AD; ed essendo le basi KF, FG, GH uguali alle basi BC, CD, DE, sarà l' angolo FKH = BAC, e l' angolo FKG = CAD, e GKH = DAE. Dunque l' angolo solido FKHG è composto da angoli uguali ai tre angoli piani dati BAC, CAD, DAE.

CAPITOLO II.

Dei poliedri. (1)

258. Abbiamo detto che chiamasi *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da piani, o faccie piane.

259. L'intersezione comune di due faccie adiacenti d'un poliedro, si chiama *lato*, *o costola* del poliedro.

260. Il *prisma* è un solido compreso da diversi piani, di cui due opposti sono uguali e paralleli, e gli altri sono parallelogrammi.

Siano per esempio i due poligoni uguali ABCDE, FGHIK (Fig. 174) situati in piani paralleli in maniera, che i lati uguali siano nel tempo stesso paralleli; se si conduce un piano per i lati uguali e paralleli AB, FG, la figura ABGF sarà un parallelogram-

---

(1) Si è creduto per questo capitolo, ed i due che seguono d'attenersi alla Geometria del Sig. Legendre; e ciò si è fatto per rendere più esatti e rigorosi questi elementi.

mo; sarà lo stesso dell' altre faccie B C H G, C D I H, ec. e il solido così formato sarà un prisma.

261. I poligoni uguali e paralleli A B C D E, F G H I K, si chiamano le *basi* del prisma, le altre faccie prese insieme costituiscono ciò, che si chiama la *superficie laterale*, o *convessa del prisma*.

262. *L' altezza d' un prisma* è la perpendicolare compresa fra i piani delle due sue basi.

263. *Un prisma é retto*, quando i lati A F, B G, ec., sono perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è uguale all' altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obliquo*, e l' altezza è minore del lato.

264. *Un prisma è triangolare, quadrangolare, pentagono, esagono*, ec., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec.

265. Il prisma (Fig. 180), che ha per base un parallelogrammo ha tutte le sue faccie parallelogramme; e si chiama *parallelepipedo*.

Il *parallelepipedo* è *rettangolo* quan-

do tutte le sue faccie sono rettangoli.

266. Tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo* o esaedro regolare compreso da sei quadrati uguali.

267. La *piramide* è il solido, che vien formato, quando più piani triangolari si riuniscono da una parte in un medesimo punto S (Fig. 175), e dall'altra terminano ad un medesimo piano A B C D E.

Il poligono A B C D E si chiama la *base* della piramide, il punto S ne è la *sommità*, ed il complesso dei triangoli A S B, B S C, ec. forma la *superficie convessa* della piramide.

268. *L' altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dalla sommità sul piano della base, prolungato se bisogna.

269. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ec., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

270. Una piramide è *regolare*, quando la base è un poligono regolare, e nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dalla sommità sul piano della base passa per il di lei centro. Questa linea si chiama allora l'*asse* della piramide.

271. *Diagonale* d' un poliedro è la linea condotta da un angolo a un altro.

272. Chiamerò *poliedri simmetrici* due poliedri, che hanno una base comune, e che sono costruiti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, in modo che gli angoli solidi omologhi siano situati a uguali distanze dal piano della base sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Per esempio (Fig. 176), se la retta S T è perpendicolare al piano A B C, e se nel punto O, ove incontra questo piano sia divisa in due parti uguali, le due piramidi SABC, TABC, che hanno la base comune AB C, saranno due poliedri simmetrici.

273. Due *piramidi triangolari* sono *simili*, quando hanno due faccie respettivamente simili, similmente poste, ed ugualmente inclinate fra loro.

Così, supponendo gli angoli ABC = DEF, (Fig. 177) BAC = EDF, ABS = DET, B A S = E D T, se inoltre l' inclinazione dei piani A B S, A B C è uguale a quella dei loro omologhi *DTE*, DEF, le piramidi di S A B C, T D E F saranno simili.

274. Avendo formato un triangolo con *tre* angoli presi sopra una medesima faccia, o base d' un poliedro, si può immaginare, che i differenti angoli solidi del poliedro fuori del piano di questa base siano le sommità di tante piramidi triangolari, che hanno per base comune il triangolo indicato, e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Posto ciò:

Due *poliedri* sono *simili*, quando avendo basi simili, gli angoli solidi omologhi fuori di queste basi sono determinati da piramidi triangolari rispettivamente simili.

N. B. *Tutti i poliedri che noi consideriamo, sono poliedri cogli angoli in fuori, o poliedri* convessi. *Chiamiamo così quelli la di cui superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano d' una faccia prolungato non può tagliare il solido; è dunque impossibile, che il poliedro sia in parte al di sopra del piano d' una faccia, in parte al di sotto, esso è tutto da una medesima parte di un tal piano.*

275. *Due poliedri non possono avere i medesimi angoli, ed in numero eguale senza coincidere l' uno con l' altro.* Per angoli s' intendono quì

i punti situati alle loro sommità;

Poichè, supponiamo uno dei poliedri già costruito; se si vuol costruirne un altro, che abbia i medesimi angoli, ed in numero egnale, bisognerà che i piani di questo non passino tutti per i medesimi angoli, per cui passano nel primo senza di che non differirebbero l' uno dall' altro: ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi taglierebbero il primo poliedro; vi sarebbero degli angoli solidi al di sopra di questi piani, e degli angoli solidi al di sotto, il che non può convenire ad un poliedro convesso: dunque se due poliedri hanno i medesimi angoli, ed in numero eguale devono necessariamente coincidere.

276. Problema. *Essendo dati di posizione* (Fig. 178) *i punti* A, B, C, K; ec. *che devono servire d' angoli solidi ad un poliedro, descrivere il poliedro stesso.*

Scegliete prima tre punti vicini D, E, H, tali che il piano D E H passi, se ciò ha luogo, per dei nuovi punti K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, tutti al di sopra del piano, o tutti al di sotto. Il piano DEH

o DEHKC così determinato sarà una faccia del solido. Per uno di questi lati EH, conducete un piano che farete girare, finchè incontri un nuovo angolo F, o più insieme F, I: avrete una seconda faccia che sarà FEH o FEHI. Continuate così, facendo passare dei piani per i lati trovati, finchè il solido sia terminato da tutte le parti: questo solido sarà il poliedro richiesto, perchè non ve ne sono due, che possano passare per i medesimi angoli.

277. *Due poliedri simmetrici, hanno le faccie omologhe respettivamente uguali, e l' inclinazione di due faccie adiacenti in un poliedro è uguale all' inclinazione delle faccie omologhe nell' altro.*

Sia (Fig. 179) ABCDE la base comune ai due poliedri; siano M ed N due angoli solidi qualunque d'uno dei poliedri, M' ed N' gli angoli omologhi dall'altro poliedro, bisognerà, secondo la definizione, che le rette MM', NN' siano perpendicolari al piano ABC, e siano divise in due parti uguali ai punti *m* ed *n*, ove incontrano questo piano.

Posto ciò, dico che la distanza MN è uguale ad M′N′.

Poichè, se si fa girare il trapezio $mM'N'n$ intorno ad mn, finchè il suo piano si applichi sul piano $mMNn$, a cagione degli angoli retti in m, ed in n, il lato mM' cadrà sul suo uguale mM, ed nN' sopra nN; dunque i due trapezj coincideranno, e si avrà MN=M′N′.

Sia P un terzo angolo del poliedro superiore, e P′ il suo omologo nell'altro, si avrà pure MP=MP′, ed NP=N′P′; dunque *il triangolo* MNP *che unisce tre angoli qualunque del poliedro superiore è uguale al triangolo* M′N′P′, *che unisce i tre angoli omologhi dell'altro poliedro*.

Dico adesso che se alcuni triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie, e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie, e formeranno una faccia poligona uguale.

In fatti, siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti, che si suppongono in uno stesso piano, e siano M′P′N′, N′P′Q′ i loro omologhi. Si ha l'angolo MNP=

M' N' P', l'angolo PNQ = P'N'Q'; e se si tirano MQ ed M'Q' il triangolo MNQ sarebbe uguale ad M'N'Q', perciò si avrebbe l'angolo MNQ = M'N'Q'. Ma poichè MPNQ è un solo piano, si ha l'angolo MNQ = MNP + PNQ. Dunque si avrà pure M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'. Or se i tre piani M'N'P', P'N'Q', M'N'Q' non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe l'angolo M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'. Dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli M'N'P', P'N'Q' sono in un medesimo piano.

Segue da ciò, che ciascuna faccia o triangolare, o poligona d'un poliedro corrisponde ad una faccia uguale nell' altro, e che perciò i due poliedri sono compresi da un medesimo numero di piani respettivamente uguali.

Resta a provare, che l'inclinazione di due faccie adiacenti qualunque in uno dei poliedri è uguale all'inclinazione delle due faccie omologhe nell'altro.

Siano MNP, NPQ due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due faccie adiacenti; siano

M′P′N′, N′P′Q′; i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ, ed in N′ un angolo solido formato dai tre M′N′Q′, M′N′P′, P′N′Q′. Ora questi angoli piani sono respettivamente uguali; dunque l'inclinazione dei due piani MNP, PNQ è uguale a quella dei loro omologhi M′N′P′, P′N′Q′.

278. *Due prismi sono uguali, allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente uguali, e similmente posti.*

Sia (Fig. 174) la base ABCDE uguale alla base *abcde*, il parallelogrammo ABGF = *abgf*, ed il parallelogrammo BCHG = *bchg*: dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*.

Poichè, sia situata la base ABCDE sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli piani, che formano l'angolo solido B, sono respettivamente uguali ai tre angoli piani, che formano l'angolo solido *b*, cioè ABC = *abc*, ABG = *abg*, e GBC = *gbc*, di più questi angoli

sono similmente posti; dunque gli angoli solidi B e *b* sono uguali, e per conseguenza il lato B G cadrà sul suo uguale *b g*. Si vede pure che a cagione dei parallelogrammi uguali ABGF, *abgf*, il lato G F cadrà sul suo uguale *g f*, e similmente G H sopra *g h*, dunque la base superiore F G H I K coinciderà intieramente colla sua uguale *f g h i k* ed i due solidi saranno confusi in uno solo, poichè avranno i medesimi angoli solidi. Dunque due prismi sono uguali ec.

279. *In ogni parallelèpipedo i piani opposti sono uguali e paralleli.*

Poichè, secondo la definizione di questo solido, (Fig. 180) le basi ABCD, EFGH sono parallelogrammi uguali, ed i loro lati sono paralleli; resta dunque a dimostrare, che la medesima cosa ha luogo per due faccie laterali opposte come A E H D, B F G C. Ora A D è uguale e parallela a B C, giacchè la figura A B C D è un parallelogrammo; per una simil ragione A E è uguale e parallela a B F. Dunque l' angolo D A E è uguale all' angolo C B F, e il piano D A E parallelo a C B F. Dunque anche il parallelogram-

mo DAEH è uguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà del pari, che i parallelogrammi ABFE, DCGH sono uguali e paralleli. Dunque in ogni parallelepipedo ec.

280. *In ogni parallepipedo* (Fig. 180) *gli angoli solidi opposti sono simmetrici, e le diagonali condotte da questi angoli, si tagliano scambievolmente in due parti uguali.*

Paragoniamo, per esempio, l'angolo solido A al suo opposto G: l'angolo EAB uguale ad EFB è pure uguale ad HGC, l'angolo DAE = DHE = CGF, e l'angolo DAB = DCB = HGF. Dunque i tre angoli piani, che formano l'angolo solido A, sono respettivamente uguali ai tre, che formano l'angolo solido G. Ma siccome sono disposti differentemente nei due angoli solidi, ne segue che questi due angoli A e G sono simmetrici l'uno coll'altro.

In secondo luogo immaginiamo due diagonali qualunque EC, AG condotte da angoli opposti. Poichè AE è uguale e parallela a CG, la figura AEGC è un parallelogrammo; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scam-

bievolmente in due parti uguali. Ma la diagonale E C, ed un altra D F si taglieranno pure in due parti uguali; dunque il mezzo d' una diagonale è il mezzo delle altre tre, e per conseguenza le quattro diagonali si taglieranno in due parti uguali in un medesimo punto, che si può risguardare come il centro del parallelepipedo.

281. *Il piano* BDHF (Fig. 181) *che passa per due costole parallele opposte* BF, DH *divide il parallelepipedo* A G *in due prismi triangolari* A B D H E F, G H F B C D *simmetrici l' uno coll' altri*.

In primo luogo questi due solidi sono prismi, perchè i triangoli A B D, E F H hanno i loro lati uguali e paralleli; dunque sono uguali, e nel tempo stesso le faccie laterali ABFE, ADHE, BDHF sono parallelogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma; lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso, che questi due prismi sono simmetrici.

Sulla base A B D fate il prisma A B D E'F'H', che sia simmetrico col prisma ABDEFH. Secondo ciò, che e

stato dimostrato (288), il piano ABF'E' è uguale ad ABFE, ed il piano ADH'E' è uguale ad ADHE: ma se si paragona il prisma GHFBCD al prisma ABDH'E'F', la base GHF è uguale ad ABD, il parallelogrammo GHDC, che è uguale ad ABFE, è pure uguale ad ABF'E', ed il parallelogrammo GFBC = ADHE = ADH'E'. Dunque i tre piani, che formano l'angolo solido G nel prisma GHFBCD, sono uguali respettivamente ai tre piani, che formano l'angolo solido A nel prisma ABDH'E'F'; d'altronde sono disposti similmente. Dunque questi due prismi sono uguali, (289) e potrebbero essere soprapposti. Ma uno di essi, ABDH'E'F' è simmetrico col prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è pure simmetrico con ABDHEF.

Un prisma triangolare qualunque ABDHEF *è la metà del parallelepipedo costruito sulle tre costole* AB, AD, AE, *che si riuniscono ad un medesimo angolo* A; *sarebbe pure la metà del parallelepipedo costruito sulle altre tre costole* BA, BC, BF.

282. *Se due parallelepipedi* AG, AL

(Fig. 182, 183) *hanno la base comune* ABCD, *e se le loro basi superiori* EFGH, IKLM *siano comprese in un medesimo piano e tra le medesime parallele* EK, HL, *questi due parallepipedi saranno equivalenti tra loro.*

Possono accadere tre casi, di cui due sono rappresentati dalle figure 182, e 183, ed il terzo avrebbe luogo se FG si confondesse con IM, ma la dimostrazione è la medesima per tutti. Ed in primo luogo dico, che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

In fatti, poichè AE è parallela a BF, ed HE a GF, l'angolo AEI=BFK, HEI=GFK. ed HEA=GFB. I tre angoli piani, che formano l' angolo solido E, sono dunque respettivamente uguali ai tre angoli piani, che formano l' angolo solido F, e di più sono disposti nella medesima maniera; dunque questi due angoli solidi sono uguali. Adesso se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e prima la base AEI sulle base BFK, queste due basi essendo uguali coincideranno, e poichè l'angolo solido E è uguale

all' angolo solido F, il lato E H cadrà sul suo uguale FG. Non bisogna altro di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base A E I e la costola E H determinano il prisma A E M, come la base BFK e la costola FG determinano il prisma BFL (289). Dunque questi due prismi sono uguali.

Ma se dal solido A E L si toglie il prisma A E M resterà il parallepipedo A I L; e se dallo stesso solido A E L si toglie il prisma B F L, resterà il parallelepipedo AEG. Dunque i due parallelepipedi A I L, A E G sono equivalenti fra loro.

283. *Due parallelepipedi della medesima base, e della medesima altezza sono equivalenti fra di loro*.

Sia (Fig. 182) A B C D la base comune ai due parallelepipedi A G, A L; poichè hanno la medesima altezza, le loro basi superiori E F G H, I K L M saranno sul medesimo piano. Di più i lati EF, ed AB sono ugnali e paralleli, come pure I K ed A B: dunque E F è uguale, e parallela ad I K; per una simil ragione G F è uguale, e pa-

rallela a L K. Siano prolungati i lati EF, HG, ed ancora LK, IM, finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro, che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH; IKLM. Ora, se s' immagina un terzo parallelepipedo, che colla medesima base inferiore ABCD abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepipedo, sarebbe equivalente al parallelepipedo AG (293) poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori sono comprese fra le parallele HP, EO. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AL. Dunque i due parallelepipedi AG, AL, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono equivalenti fra di loro.

284. *Ogni parallelepipedo può essere cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente, che abbia la medesima altezza ed una base equivalente.*

Sia (Fig. 184, e 185) AG il parallelepipedo proposto: dai punti A, B, C, D, conducete AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base; for-

merete così il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, e le di cui faccie laterali AK, BL, ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG. Ma se ABCD (Fig. 185) non è un rettangolo, conducete AO, e BN perpendiculari sopra CD, di poi OQ ed NP perpendicolari sopra la base, avrete il solido ABNOIKPQ, che sarà un parallelepipedo rettangolo. In fatti, per costruzione, la base ABON e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le faccie laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ, ec. sono perpendicolari al piano della base: dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come costruiti sulla medesima base ABKI e colla medesima altezza AO (Fig. 185): dunque sono equivalenti; dunque il parallelepipedo AG, che era stato prima cangiato in un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP,

che ha la medesima altezza A I, e la di cui base A B N O è equivalente alla base A B C D.

285. *Ogni sezione* NOPQR (Fig. 174) *fatta in un prisma parallelamente alla base* ABCDE *è uguale a questa base*.

Poichè le parallele AN, B O, C P, ec. comprese fra' piani paralleli A B C; N O P sono eguali; e perciò tutte le figure A B O N, B C P O, ec. sono parallelogrammi. Da ciò ne segue che il lato O N è uguale ad A B, OP=BC, Q P = C D, ec. di più i lati uguali sono paralleli: dunque l'angolo ABC= NOP, l'angolo B C D = O P Q, ec. Dunque i due poligoni ABCDE, NOPQR hanno i lati e gli angoli rispettivamente uguali: dunque sono uguali.

286. *Due parallelepipedi rettangoli* A G, A L (Fig. 186), *che hanno la medesima base* A B C D *stanno fra di loro come le loro altezze* A E, A I.

Supponiamo primieramente, che le altezze A E, A I stiano fra di loro come dei numeri intieri, per esempio, come 15 : 8. Si dividerà A E in 15 parti uguali, di cui A I ne conterrà 8; e per i punti di divisione x, y, z, ec.

si condurranno dei piani paralleli alla base. Questi divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali, che saranno tutti eguali fra di loro, perchè avranno basi uguali, e altezze uguali; basi uguali, perchè ogni sezione come MIKL fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD è uguale a questa base; altezze uguali, perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax, xy, yz, ec. Ora di questi 15 parallelepipedi, 8 sono contenuti in AL; dunque il solido AG sta al solido AL come 15 : 8, o in generale come l' altezza AE all' altezza AI.

In secondo luogo, se il rapporto di AE ad AI non può esprimersi in numeri, dico che sarà egualmente *solid.* AG : *solid.* AL :: AE : AI. Poichè, se questa proporzione non ha luogo, supponiamo che si abbia *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO. Dividete AE in parti eguali, di cui ciascuna sia minore di OI, vi sarà almeno un punto di divisione m fra O ed I. Sia P il parallelepipedo che ha per base ABCD e per altezza Am; poichè le altezze AE, Am, stanno fra di loro come due nu-

meri interi, si avrà *sol.* AG : P :: AE : A*m*. Ma si ha per ipotesi *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO; da ciò risulta *sol.* AL : P :: AO : A*m*. Ma AO è maggiore di A*m*; dunque bisognerebbe, perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse maggiore di P : ora al contrario è minore; dunque è impossibile, che il quarto termine della proporzione *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : X, sia una linea AO maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe, che il quarto termine non può essere minore di AI, dunque è uguale ad AI. Dunque i parallelepipedi rettangoli della medesima base stanno fra di loro come le loro altezze.

287. *Due parallelepipedi rettangoli* AG, AB (Fig. 187) *che hanno la medesima altezza* AE, *stanno fra di loro come le basi* AKCD, AMNO.

Avendo situato i due solidi, uno accanto dell'altro, come la figura gli rappresenta, prolungate il piano ONBL finchè incontri il piano DCGH in PQ, avrete un terzo parallelepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei

parallelepipedi A G, A B. I due solidi AG, AQ avendo la medesima base AEHD stanno fra di loro come le loro altezze AK, AO; parimente, i due solidi A Q, A B avendo la medesima base A O L E stanno fra di loro come le loro altezze A D, A M. Perciò si avranno le due proporzioni

sol. A G : *sol.* A Q :: A K : A O;
sol. A Q : *sol.* A K :: A D : A M.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e omettendo nel risultamento il moltiplicatòr comune *sol.* AQ, si avrà

sol. A G : *sol.* A B :: A K × A D : A O × A M.

Ma AK × AD rappresenta la base AKCD, ed AO × AM la base A M N O; dunque due parallèpipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra di loro come le loro basi.

288. *Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra di loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.*

Poichè, avendo situato i due solidi AG, AZ in maniera, che abbiano un

angolo comune BAE, prolungate i piani necessari per formare il terzo parallepipedo AB della medesima altezza col parallepipedo AG. Si avrà per la proposizione precedente

sol. AG : *sol.* AB . AKCD : AMNO.

Ma i due parallelepipedi AB, AZ, che hanno la medesima base AMNO, stanno fra di loro come le loro altezze AE, AX; onde si ha

sol. AB : *sol.* AZ :: AE : AX.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e omettendo nel risultato il moltiplicator comune *sol.* AB, si avrà

*sol.*AG:*sol.*AZ::AKCD×AE:AMNO×AX:

In vece di AKCD ed AMNO si può mettere AK×AD ed AO×AM, il che darà

*sol.*AG:*sol.*AZ::AK×AD×AE:AO×AM×AX.

Dunque due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra di loro come i prodotti delle loro tre dimensioni.

289. Da ciò segue, che si può prendere per misura d'un parallepipedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue

tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

290. *La solidità d'un parallelepipedo e in generale la solidità d'un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè, 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente (295). Ora la solidità di questo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà d'un parallelepipedo della medesima altezza e di base doppia (292). Ora la solidità di questo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è eguale al prodotto della sua base metà di quella del parallelepipedo moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza, quanti triangoli si possono formare nel poligono che gli

serve di base. Ma la solidità d'ogni prisma triangolare è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà eguale alla somma di tutti i triangoli che servono loro di base, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma poligono qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

291. *Se una piramide* S A B C D E (Fig. 188) *è tagliata da un piano* abe *parallelo alla base*,

1.° *I lati* S A, S B, S C, ec. *e l'altezza* S O *saranno tagliati proporzionalmente in* a, b, c, ec. *ed* o.

2.° *La sezione* a b c d e *sarà un poligono simile alla base* A B C D E.

Poichè, 1.° essendo paralleli i piani A B E, *a b e*, le loro intersezioni A B, *a b* con un terzo piano S A B saranno parallele; dunque i triangoli SAB, *sab*, sono simili, e si ha la proporzione S A : S *a* :: S B : S *b*; si avrebbe pure S B : S *b* :: S C : S *c*, e così in seguito. Dunque tutti i lati SA, SB, SC,

ec. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, ec. L' altezza S O è tagliata nella medesima proporzione al punto *o*; perchè B O, e *b o* sono parallele, e però si ha S O : S *o* :: S B : S *b*.

2.° Poichè *a b* è parallela ad A B, *b c* a B C, *c d* a C D, ec. l' angolo *a b c* = A B C, l' angolo *b c d* = B C D, e così in seguito. Di più a cagione dei triangoli simili S A B, S *a b*, si ha A B : *a b* :: S B : S *b*; ed a cagione dei triangoli simili S B C, S *b c*, si ha S B : S *b* :: B C : *b c*; dunque A B : *a b* :: B C : *b c*; si avrebbe pure B C : *b c* :: C D : *c d*, e così in seguito. Dunque i poligoni *a b c d e*, A B C D E hanno gli angoli eguali ed i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili.

292 *Sia* (Fig. 189) S A B C *una piramide triangolare di cui* S *è la sommità ed* A B C *la base*, *avendo preso a piacere* S P < S A *determinate successivamente* S Q, S R, S V, *ec. in maniera che si abbia la progressione geometrica* S A : S P :: S P : S Q :: S Q : S R :: S R : S V, *e così all' infinito: per il punto* P *fate passare il piano* P E D *parallelo alla base*, *e finalmente conducete* B G, C F,

IE, HD *parallele ad* AP, *avrete due prismi triangolari* ABCFPG, AHIEPD *uno maggiore, l'altro minore della porzione di piramide* ABCEPD *che corrisponde alla divisione* AP: *supponiamo che si siano formati dei prismi simili a ciascuna dell' altre divisioni* PQ, QR, RV, ec.: *posto ciò*,

1.° *Ciascun prisma* ABCFPG *che si può chiamare* prisma eccedente *sta a ciascun prisma* AHIEPD *che si può chiamare* deficiente, *come il quadrato di* SA *sta al quadrato di* SP.

2.° *La somma di tutti i prismi eccedenti sta alla somma di tutti i prismi deficienti parimente* :: $\overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$.

In fatti, 1.° i due prismi eccedente e deficiente, hanno la medesima altezza, stanno dunque fra loro come le loro basi ABC, AHI. Essendo queste basi triangoli simili, si ha ABC : AHI :: $\overline{AB}^2 : \overline{AH}^2$, o $\overline{PD}^2$; ma essendo PD parallela ad AB, si ha AB : PD :: SA : SP, e $\overline{AB}^2 : \overline{PD}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$. Dunque il prisma eccedente PABC sta al prisma deficiente PAHI come $\overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$.

2.° Si dimostrerà parimente, che i prismi eccedente e deficiente, che corrispondono alla divisione P Q, stanno fra di loro come $\overline{SP}^2 : \overline{SQ}^2$. Ma per supposizione SA : SP :: SP : SQ, o $\overline{SP}^2 : \overline{SQ}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$; dunque i prismi eccedente e deficiente, che corrispondono alla divisione P Q stanno fra di loro come $\overline{SA}^2 : \overline{SP}^2$. Questo medesimo rapporto sussisterà in tutte le divisioni; onde si avrà una serie di rapporti eguali nei quali i prismi eccedenti saranno antecedenti, ed i prismi deficienti saranno conseguenti. Donde ne segue, che la somma di tutti i prismi eccedenti, sta alla somma di tutti i prismi deficienti come un antecedente sta al suo conseguente, o come il quadrato di S A sta al quadrato di S P.

Se si considera un' altra piramide S X Y Z, che abbia la medesima sommità, e la medesima altezza, talmente che le basi A B C, X Y Z siano in un medesimo piano, essendo divisa questa seconda piramide come la prima coi medesimi piani che passano per i punti P, R, R, ec., ed essendo pa-

mente formati ad ogni divisione i prismi eccedenti, e deficienti; dico che *la somma dei prismi eccedenti o deficienti in una piramide, sta alla somma dei prismi dello stesso nome nell' altra, come la base della prima, sta alla base della seconda.*

Poichè, due prismi della medesima altezza stanno fra di loro come le loro basi: ora due sezioni fatte dal medesimo piano nelle due piramidi stanno fra di loro come le loro basi (preced.). Dunque ciascun prisma eccedente o deficiente in una piramide sta al suo corrispondente del medesimo nome nell' altra come la base della prima, sta alla base della seconda. Dunque la somma dei prismi eccedenti o deficienti nell' una, sta alla somma dei prismi del medesimo nome nell' altra come la base della prima, sta alla base della seconda.

293. *Due piramidi triangolari della medesima altezza* SABC, SXYZ *stanno fra di loro come le loro basi* ABC, XYZ.

Se si nega questa proposizione, la piramide SABC starà alla piramide SXYZ, come la base ABC sta ad una

superficie K maggiore o minore di XYZ. Supponiamo in primo luogo K > XYZ, e sul lato SA prendiamo il punto P in maniera che sia

$$K : XYZ :: \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2 .$$

Dividiamo il lato SA nei punti Q, R, ec. talmente, che si abbia la progressione SA : SP :: SP : SQ :: SQ : SR, ec. all' infinito. Per i punti P, Q, R, ec. conduciamo dei piani paralleli alla base, e formiamo come si è detto di sopra dei prismi eccedenti e deficienti all' infinito nelle due piramidi.

Sia D la somma dei prismi deficienti, ed E la somma dei prismi eccedenti nella piramide SABC; siano *d* ed *e* le somme simili nell' altra piramide. Posto ciò, si avranno in virtù di ciò che precede, le quattro proporzioni seguenti, cioè

Per supposizione SABC : SXYZ :: ABC : K.

Per costruzione K : XYZ :: $\overline{SA} : \overline{SP}^2$.

Per la prop. precedente E : D :: $\overline{SA}^2 : \overline{SP}^3$.

Per la stessa E : e :: ABC : XYZ.

La seconda e la terza danno E : D :: K : XYZ; questa avendo i medesimi estre-

mi della quarta, i medj daranno D : e :: ABC : K Finalmente, paragonando questo risultamento colla prima, si avrà

SABC : SXYZ :: D : e.

Ora D minore di SABC, ed al contrario e è maggiore di SXYZ; dunque questa proporzione non può aver luogo. Dunque è impossibile, che la piramide SABC, stia alla piramide SXYZ come la base ABC sta ad un quarto termine K maggiore di XYZ.

Supponiamo in secondo luogo K<XYZ, allora si avrebbe la proporzione: SXYZ sta ad SABC come una superficie minore di XYZ sta ad ABC, o come XYZ sta ad una superficie maggiore di ABC. Ma è chiaro, che lo stesso ragionamento impiegato nella prima supposizione si applicherebbe a questa, cangiando soltanto le piramidi una per l'altra; ed in fatti dal primo ragionamento si poteva conchiudere in generale, che una piramide non può stare ad una piramide della medesima altezza, come la base della prima sta ad una quantità maggiore della base della seconda. Da ciò ne segue, che questa seconda supposizione è assurda quanto la prima, e

che perciò il quarto termine della proporzione di cui si tratta, non può essere nè maggiore nè minore di XYZ. Dunque è uguale ad XYZ. Dunque SABC : SXYZ :: ABC : XYZ.

Due piramidi triangolari della medesima altezza, e di basi eguali in superficie, sono equivalenti.

294 *Ogni piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza.*

Sia (Fig. 190) SABC una piramide triangolare, ABCDES il prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza; dico che la piramide sarà la terza parte del prisma.

Toglicte dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE, che si può considerare come una piramide quadrangolare, la di cui sommità è S, e che ha per base il parallelogrammo ACDE; tirate la diagonale CE, e conducete il piano SCE, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE. Queste due piramidi hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata da S sul piano

ACDE; esse hanno basi eguali, poichè i triangoli ACE, DCE sono metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi SACE, SCDE sono equivalenti fra di loro (304). Ma la piramide SCDE, e la piramide SABC hanno basi eguali ABC, DSE; hanno pure la medesima altezza poichè essa è la distanza dei piani paralleli ABC, DSE; dunque le due piramidi SABC, SCDE sono equivalenti o eguali in solidità. Ma si è dimostrato, che la piramide SACE è equivalente a SCDE; dunque le tre piramidi SABC, SCDE, SACE, che compongono il prisma ABD sono equivalenti fra di loro. Dunque ciascuna di queste piramidi, e nominatamente la piramide SABC è la terza parte del prisma della medesima base, e della medesima altezza.

Dunque la solidità d' una piràmide triangolare è eguale alla terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

295. *Ogni piramide* (Fig. 188) SABCDE *ha per misura la terza parte del prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.

Poichè facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari, che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma per il numero precedente ciascuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE per la terza parte dell'altezza SO; dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE moltiplicato per $\frac{1}{3}$ SO. Dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza; o, il che torna lo stesso, ogni piramide è la terza parte del prisma della medesima base, e della medesima altezza.

296. Segue da ciò, che due piramide della medesima altezza stanno fra di loro come le loro basi, e che due piramidi della medesima base stanno fra di loro come le loro altezze.

297. Si può valutare la solidità d'ogni corpo poliedro, decomponendolo in piramidi, e questa decomposizione si

può fare in più maniere. Una delle più semplici è di far partire i piani di divisione da un medesimo angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante faccie sono nel poliedro, eccetto quelle che formano l' angolo solido donde partono i piani di divisione.

298. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide, è eguale alla somma di tre piramidi che avessero per altezza comune l' altezza del tronco, e le di cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.*

Sia (Fig. 191) SABCDE una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; sia TFGH una piramide triangolare, la di cui base ed altezza siano eguali o equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si possono suporre le due basi situate sopra un medesimo piano; ed allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh*, situata alla medesima altezza al di sopra del

piano comune delle basi. Ora le sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH: ABD (302); e poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saranno pure. Da ciò segue, che le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono equivalenti, giacche hanno la medesima altezza, e basi equivalenti. Le piramidi intiere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proporzione enunciata per il solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia dunque (Fig. 192) FGH*hfg* un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, *g*, H conducete il piano F*g*H, che taglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH; questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; ha per altezza l'altezza del tronco, poichè la sommità *g* è nel piano della base superiore *fgh*.

Dopo aver tolto questa piramide, resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, la di cui sommità è *g*, e la base *fh*HF.

Per i tre punti f, g, H conducete il piano fgH, che dividerà la piramide quadrangolare in due triangolari gFfH, gfhH. Quest' ultima ha per base la base superiore gfh del tronco, e per altezza l'altezza del tronco. Onde abbiamo già due delle tre piramidi, che devono comporre il tronco.

Resta a considerare la terza gFfH; ora se si conduce gK parallela a fF, e se si immagina una nuova piramide fFHK, la di cui sommità è K e la base FfH; queste due piramidi avranno la medesima base Ffh; avranno pure la medesima altezza, poichè le sommità g e K sono situate sopra una linea gK parallela al piano della base: dunque queste piramidi sono equivalenti: ma la piramide fFKH può considerarsi come se avesse la sua sommità in f, e così ella avrà la medesima altezza del tronco. Quanto alla sua base FKH, dico che è media proporzionale fra le basi FGH, fgh. In fatti i triangoli FHK, fgh hanno un angolo eguale F=f, ed un lato FK=fg; si ha dunque FHK : fgh :: FH : fh. Si ha pure FHG : FGK :: FG : FK,

o fg. Ma i triangoli simili FGH, fgh danno FG : fg :: FH : fh; dunque FGH : FHK :: FHK : fgh; cioè la base FHK è media proporzionale fra le due FGH, fgh. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele equivale a tre piramidi, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le di cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

CAPITOLO III.

Della Sfera.

299. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno, che si chiama *centro*.

Si può immaginare, che la sfera sia prodotta dalla rivoluzione del mezzo circolo DAE (Fig. 193) intorno al diametro DE. Poichè la superficie descritta con tal movimento dalla curva

DAE, avrà tutti i suoi punti a distanze eguali dal centro C.

300. *Il raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro ad un punto della superficie; il *diametro*, o *asse* è una linea che passa per il centro, e che termina dalle due parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono eguali, tutti i diametri sono eguali, e doppj del raggio.

301. Si dimostrerà (325) che ogni sezione della sfera fatta da un piano è un circolo; posto ciò, si chiama *gran circolo* la sezione che passa per il centro, *piccolo circolo* quella che non vi passa.

302. Un *piano* è *tangente* della sfera, quando ha un solo punto comune colla sua superficie.

303. *Il polo d' un circolo* della sfera é un punto della superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. Si farà vedere (325), che ogni circolo grande o piccolo ha sempre due poli.

304 *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli grandi.

Questi archi che si chiamano *i lati* del triangolo, vengono sempre supposti minori della mezza circonferenza. Gli angoli, che i loro piani fanno fra di loro sono gli angoli del triangolo.

305. *Un triangolo sferico* prende il nome di *rettangolo*, *obliquangolo*, *isoscele*, *equilatero* ne' casi stessi d'un triangolo rettilineo.

306. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di circoli grandi.

307. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due gran mezzi circoli, che hanno un diametro comune.

308. Chiamerò *cuneo* o *unghia sferica*, la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi gran mezzi circoli. La *base* del cuneo sarà il fuso.

309. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d'un angolo solido, la di cui sommità è al centro. La base della piramide sarà un poligono sferico.

310. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli: uno di questi piani può

essere tangente della sfera; allora, la zona ha una sola base.

311. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli. Uno di questi piani può essere tangente della sfera, ed allora il segmento sferico ha una sola base.

312. L'*asse*, o *altezza* d'una zona e d'un segmento, è la distanza dei due piani paralleli, che sono le basi della zona o del segmento.

313. Mentre il mezzo circolo DAE girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settore circolare come DCF o FCH descrive un solido, che si chiama *settore sferico*.

314. *Se la sfera è tagliata da un piano qualunque, la sezione sarà un circolo*.

Sia (Fg. 194) AMB la sezione fatta da un piano nella sfera il di cui centro è C. Dal punto C conducete la perpendicolare CO sul piano AMB, e differenti linee CM, CM a differenti punti della curva AMB, che termina la sezione.

Le oblique CM, CM, CB sono e-

guali, poichè sono raggi della sfera; esse sono dunque egualmente lontane dalla perpendicolare CO; dunque tutte le linee OM, OM, OB sono eguali; dunque la sezione AMB è un circolo di cui il punto O è il centro.

315. Se la sezione passa per il centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i gran circoli sono eguali fra di loro.

316. Due gran circoli si tagliano sempre in due parti eguali, poichè la loro comune intersezione, passando per il centro, è un diametro.

317. Ogni gran circolo divide la sfera e la sua superficie in due parti eguali; poichè se dopo aver separato i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno una coll' altra, senza di che vi sarebbero dei punti più vicini al centro gli uni degli altri.

318. Il centro d' un piccolo circolo e quello della sfera sono sopra una medesima retta perpendicolare sul piano del circolo piccolo.

319. I circoli piccoli sono tanto più

piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè quanto è più grande la distanza C O, tanto è più piccola la corda A B diametro del piccolo A M B.

320. Per due punti dati sulla superficie d'una sfera, si può far passare un arco di circolo grande, perchè i due punti dati, e il centro della sfera sono tre punti, che determinano la posizione d'un piano. Ma se i due punti dati fossero alle estremità d'un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un infinità di circoli grandi che potrebbero passare per i due punti dati.

321. *In ogni triangolo sferico* ABC, *un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (Fig. 195).

Sia O il centro della sfera, e siano condotti i raggi O A, O B O C. Se s'immaginano i piani A O B, A O C, C O B, questi piani formeranno al punto O un angolo solido; e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati A B, A C, B C del triangolo sferico A B C. Ora ciascuno dei tre

angoli piani, che compongono l' angolo solido è minore della somma degli altri due; dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due.

322 *Il più corto camino da un punto ad un altro sulla superficie della sfera è l' arco di circolo grande, che unisce i due punti dati.*

Sia (Fig. 196) ANB l' arco di circolo grande, che unisce i punti A e B, e sia, se è possibile, M un punto della linea la più corta fra A e B. Per il punto M conducete gli archi di circolo grande MA, MB, e prendete BN = MB.

Per la proposizione precedente ANB è più corto di AMB: togliendo da ambedue BN=BM resterà AN<AM. Ora la distanza da B a M, o sia che essa si confonda coll' arco BM, o che essa sia qualunque altra linea, è eguale alla distanza da B a N; poiche facendo girare il piano del circolo grande BM intorno al diametro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, ed allora la linea più corta da M a B, qualunque sia, si confon-

derà con quella da N a B; dunque i due camini da A a B, l'uno che passa per M, l'altro per N, hanno una parte eguale da M a B, e da N a B. Il primo camino per supposizione è il più corto, dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A a N, il che è assurdo, poichè l'arco AM è maggiore di AN. Dunque verun punto della linea più corta fra A e B non può essere fuori dell' arco ANB, dunque quest' arco stesso è la linea più corta fra le di lui estremità.

323. *La somma dei tre lati d' un triangolo sferico è minore della circonferenza d' un circolo grande.*

Sia ABC un triangolo sferico qualunque (Fig. 197): prolungate i lati AB, AC finchè s' incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD, saranno mezze circonferenze, poichè due circoli grandi si tagliano sempre in due parti eguali; ma nel triangolo BCD il lato $BC < BD + CD$; aggiungendo dalle due parti $AB + AC$, si avrà $AB + AC + BC < ABD + ACD$, cioè minore d' una circonferenza.

324. *La somma dei lati d' ogni po-*

ligono sferico, è minore della circonferenza d' un circolo grande.

Sia (Fig. 198), per esempio, il pentagono ABCDE; prolungate i lati AB, DC finchè s' incontrino in F: poichè BC è minore di BF + CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolungate nuovamente i lati AE, FD finchè s' incontrino in G, si avrà ED < EG + GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d' un circolo grande; dunque molto più il contorno del poligono ABCDE è minore della stessa circonferenza.

325. *Ogni piano perpendicolare all' estremità d' un raggio, è tangente della sfera.*

Sia (Fig. 199) FAG un piano perpendicolare all' estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano, e che si tirino OM ed AM, l' angolo OAM sarà retto, e però la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera; e siccome è lo stesso per ogni

altro punto del piano FAG, ne segue, che questo piano ha il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque è tangente di questa superficie.

326. *L' angolo* BAC (Fig. 199), *che fanno fra di loro due archi di circoli grandi* AB, AC *è eguale all' angolo* FAG *formato dalle tangenti di quest' archi al punto* A: *ha pure per misura l' arco* DE *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AB, AC *prolungati se è necessario*.

Poichè la tangente AF condotta nel piano dell' arco AB è perpendicolare al raggio AO: la tangente AG condotta nel piano dell' arco AC è perpendicolare al medesimo raggio AO. Dunque l' angolo FAG è eguale all' angolo dei piani OAB, OAC, che è quello degli archi AB, AC, e che si indica con BAC.

Parimente, se l' arco AD è eguale ad un quadrante, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e perciò l' angolo DOE sarà eguale all' angolo dei piani AOD, AOE. Dunque l' arco DE è la misura dell' an-

golo di questi piani, o sia la misura dell' angolo BAC.

327. *Essendo dato il triangolo* ABC, *se si descrive il triangolo* DEF *in maniera, che gli angoli del primo siano i poli dei lati del secondo, reciprocamente gli angoli del secondo saranno i poli dei lati del primo* (Fig. 200).

Dai punti A, B, C come poli, siano descritti gli archi EF, DF, DE, che col loro concorso formano il triangolo DEF: dico che gli angoli D, E, F saranno i poli degli archi BC, AC, AB respettivamente.

Poichè essendo il punto A il polo dell' arco EF, la distanza AE è un *quadrante*; essendo il punto C il polo dell' arco DE, la distanza CE è parimente un *quadrante*; dunque il punto E è lontano un *quadrante* da ciascuno dei punti A e C; dunque è il polo dell' arco AC. Si dimostrerà del pari, che D è il polo dell' arco BC, ed F quello dell' arco AB.

328. *Poste le medesime cose del teorema precedente ciascun angolo d' uno dei triangoli* ABC, DEF, *avrà per misura la mezza circonferenza meno il lato opposto nell' altro triangolo.*

Siano prolungati, se è necessario, i lati AB, AC finchè incontrino EF in G e H; poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l'angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l'arco EH è un *quadrante* come pure GF, giacchè E è il polo di AH, ed F è il polo di AG; dunque EH + GF equivale ad una mezza circonferenza. Ora EH + GF è lo stesso che EF + GH. Dunque l'arco GH, che misura l'angolo A è eguale ad una mezza circonferenza meno il lato EF; parimente l'angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF; e l'angolo C, $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Questa proprietà dev'essere reciproca fra i due triangoli, giacchè si descrivono nella stessa maniera l'uno col mezzo dell'altro. Perciò si troverà, che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hanno per misura respettivamente $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB. In fatti l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI: ora MI + BC = MC + BI = $\frac{1}{2}$ *circ.* Dunque l'arco MI misura dell'angolo D, = $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, e così degli altri.

329. Bisogna osservare, che oltre il

triangolo DEF (Fg.. 201), se ne potrebbero formare tre altri, i di cui angoli sarebbero parimente i poli dei lati del triangolo ABC, perchè l' intersezione di tre archi dati di posizione produce quattro triangoli. Ma la proposizione attuale non ha luogo che per il triangolo centrale, che è distinto dagli altri tre in questo, che i due angoli A e D sono situati da una medesima parte di BC, i due B ed E da una medesima parte di AC, ed i due C ed F da una medesima parte di AB.

Si danno diversi nomi ai due triangoli ABC, DEF: il più conveniente sembra quello di *triangoli polari*.

330. *Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere eguali, sono eguali in tutte le loro parti, quando hanno un angolo eguale compreso fra lati respettivamente eguali.*

Sia il lato AB = EF (Fig 202), il lato AC = EG, e l'angolo BAC = FEG; il triangolo EFG potrà essere situato sopra il triangolo ABC o sul suo simmetrico ABD nella medesima maniera che si soprapongono due triangoli rettilinei, che hanno un angolo eguale

compreso fra lati eguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno eguali a quelle del triangolo ABC, cioè oltre le parti che sono supposte eguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG, e l'angolo ACB=EGF.

331. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali; e reciprocamente se due angoli d'un triangolo sferico sono eguali, il triangolo sarà isoscele* (Fig. 203).

1.° Sia il lato AB = AC; dico che si avrà l'angolo C=B; poichè se dalla sommità A al punto D mezzo della base si conduce l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i tre lati respettivamente eguali; cioè AD comune, BD = DC, ed AB = AC; dunque per il teorema precedente questi triangoli avranno gli angoli eguali, e si avrà B = C.

2.° Sia l'angolo B=C; dico che sarà AC=AB; poichè se il lato AB non è eguale ad AC, sia AB il più grande di essi, prendete BO = AC, e tirate OC. I due lati BO, BC sono eguali ai due lati AC, BC; l'angolo

compreso dai primi O B C è eguale all' angolo compreso dai secondi A C B. Dunque per la proposizione antecedente, i due triangoli B O C, A C B hanno le altre parti eguali, e per conseguenza l'angolo O C B = A B C; ma l'angolo ABC per supposizione = ACB; dunque si avrebbe O C B = A C B, il che è impossibile. Dunque non si può supporre A B differente da A C; dunque i lati A B, A C opposti agli angoli eguali C e B sono eguali.

332 *In un triangolo sferico* A B C (Fig 204), *se l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* B, *il lato* BC *opposto all' angolo* A *sarà maggiore del lato* A C *opposto all' angolo* B; *reciprocamente se il lato* BC *è maggiore di* AC, *l'angolo* A *sarà maggiore dell' angolo* B.

1.° Sia l'angolo A > B, fate l'angolo B A D = B, avrete AD = DB (343). Ma A D + D C è maggiore di A C; in vece di A D mettendo D B, si avrà D B + D C o B C > A C.

2.° Se si suppone B C > A C, dico che l'angolo B A C sarà maggiore di A B C. Poichè se B A C fosse eguale ad A B C, si avrebbe B C = A C; e

se fosse B A C < A B C, ne nascerebbe secondo ciò che si è dimostrato BC < AC; il che è contro la supposizione. Dunque B A C è maggiore di A B C.

333 *La somma degli angoli d'ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.*

Poichè, 1.° ciascun angolo d'un triangolo sferico è minore di due angoli retti (vedete il n.° 336), dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.° La misura di ciascun angolo d'un triangolo sferico è eguale alla mezza circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare (340). Dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre mezze circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest' ultima somma è minore di una circonferenza (334); dunque togliendola da tre mezze circonferenze, resterà più d'una mezza circonferenza, che è la misura di due angoli retti. Dunque 2.° la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

334. La somma degli angoli d'un

triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; varia da due angoli retti fino a sei, senza potere essere eguale nè all' uno nè all' altro limite. Onde due angoli dati non fanno conoscere il terzo.

335. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC (Fig. 205. n.° 1) è *birettangolo*, cioè, se à due angoli retti B e C, la sommità A sarà il polo della base BC; ed i lati AB, AC saranno *quadranti*.

Se in oltre l' angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *trirettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati *quadranti*. Il triangolo trirettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera, il che si vede per mezzo della figura 206, supponendo l' arco MN eguale ad un *quadrante*.

336. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conforme al paragrafo 304, che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della mezza circonferenza, allora ne segue, che

gli angoli sono sempre minori di due angoli retti. Perchè se il lato AB è minore della mezza circonferenza, come pure AC (Fig. 207), questi archi devono essere prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD presi insieme, equivalgono a due angoli retti: dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

337. *Il fuso* AMBNA (Fig. 206) *sta alla superficie della sfera come l' angolo* MAN *di questo fuso sta a quattro angoli retti*, *o come l' arco* MN, *che misura quest' angolo sta alla circonferenza*.

Supponghiamo primieramente, che l'arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale, per esempio come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti eguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo di poi il polo A ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella mezza sfera AMNPQ, che saranno tutti eguali fra di loro, poichè avranno tutte le loro parti eguali. La sfera intera conterrà dunque 96 di tali

triangoli parziali, ed il fuso A M B N A ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla superficie della sfera come 10 sta a 96, o come 5 sta a 48, cioè come l' arco M N sta alla circonferenza.

Se l' arco M N non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si sono già veduti molti esempj, che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l' arco M N sta alla circonferenza.

338. *Se due gran circoli* (Fig. 208) A O B, C O D *si tagliano come si voglia nell' emisfero* O A C B D, *la somma dei triangoli opposti* A O C, B O D, *sarà eguale al fuso il di cui angolo è* B O D.

Poichè, prolungando gli archi O B, O D nell' altro emisfero, finchè s' incontrino in N, O B N sarà una mezza circonferenza come pure A O B: togliendo O B da ambedue, si avrà B N = A O: Per una simil ragione D N = C O, e B D = A C. Dunque i due triangoli A O C, B D N hanno i tre lati eguali, e similmente disposti; dunque sono eguali, e la somma dei triangoli A O C, B O D è equivalente al fuso O B N D O, il di cui angolo è B O D.

339. *La superficie d' un triangolo sferico qualunque ha per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.*

Sia ABC (Fig. 209) il triangolo proposto: prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuori del triangolo. Per la proposizione precedente i due triangoli ADE, AGH presi insieme equivalgono al fuso il di cui angolo è A, e che ha per misura 2A Onde si avrà ADE + AGH = 2A; per una simile ragione BGF + BID = 2B, CIH + CFE = 2C. Ma la somma di questi sei triangoli supera la mezza sfera di due volte il triangolo ABC; d'altronde la mezza sfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è eguale a 2A + 2B + 2C − 4, e per conseguenza ABC = A + B + C − 2 Dunque un triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

340. *La superficie d' un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno tante volte due angoli retti, quanti lati di più di due ha il poligono.*

Dall' angolo A (Fig. 210) siano condotte a tutti gli altri angoli le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli meno due, quanti lati egli contiene. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti, ed è chiaro, che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è eguale alla somma degli angoli del poligono. Dunque la superficie del poligono è eguale alla somma dei suoi angoli, meno tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due.

Sia S la somma degli angoli d' un poligono sferico, N il numero dei suoi lati; essendo supposto l' angolo retto per l' unità, la superficie del poligono, avrà per misura $S-2(N-2)$ o sia $S-2N+4$.

CAPITOLO IV.

Dei corpi tondi.

341. Si chiama *cilindro* il solido prodotto dalla rivoluzione d' un rettangolo ABCD (Fig. 211), che s' immagina rivolgersi intorno il lato immobile AB.

In tal movimento i lati BC, AD restando sempre perpendicolari ad AB descrivono dei piani circolari eguali DHE, CGF, che si chiamano le *basi del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa*.

La linea immobile AB, si chiama *l' asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all' asse è un circolo eguale a ciascuna delle basi. Poichè mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK perpendicolare ad AB descrive un piano circolare eguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all' asse nel punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l' asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

342. Si chiama *cono* il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB (Fig. 212), che si immagina girare intorno al lato immobile SA.

In questo movimento, il lato AM descrive un piano circolare BDCE,

che si chiama *base del cono*, e l' ipotenusa S B ne descrive *la superficie convessa*.

Il punto S si chiama *la sommità del cono*, S A *l' asse* o *l' altezza*, ed S B *il lato* o *l' apotema*.

Ogni sezione H K F I fatta perpendicolarmente all' asse è un circolo; ogni sezione S D E fatta per l' asse è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore S A B.

343 Se dal cono S C D B si toglie, mediante una sezione parallela alla base, il cono S F K H, il solido rimanente CBHF si chiama *cono troncato*, o *tronco di cono*. Si può supporre che sia descritto dalla rivoluzione del traperzio ABHG, i di cui angoli A e G sono retti, intorno al lato A G. *La linea immobile* A G si chiama *asse* o *altezza del tronco*, i circoli B D C, H K F ne sono le basi, e B H ne è *il lato*.

344. Due cilindri o due coni sono *simili*, quando i loro assi stanno fra di loro come i diametri delle loro basi.

345. Se nel circolo A C D (Fig. 213) che serve di base ad un cilindro, si

inscrive un poligono ABCDE, e sulla base ABCDE s' innalza un prisma retto eguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *inscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*.

È chiaro, che le costole AF, BG, ec. del prisma, essendo perpendicolari al piano della base sono comprese nella superficie del cilindro. Dunque il prisma ed il cilindro si toccano lungo queste costole.

346. Parimente se ABCD (Fig. 214) è un poligono circoscritto alla base d' un cilindro, e sulla base ABCD si costruisce un prisma retto eguale in altezza al cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *inscritto nel prisma*.

Siano M, N, ec. i punti di contatto dei lati AB, BC, ec., e siano alzate dai punti M, N, ec., le perpendicolari MX, NY, ec. al piano della base; e chiaro che queste perpendicolari saranno ad un tempo stesso nella superficie del cilindro, ed in quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

347. *Una superficie piana* OABCD

é minore di ogni altra superficie PABCD *terminata al medesimo contorno* ABCD (Fig 215).

Questa proposizione è abbastanza evidente per essere posta nel numero degli assiomi; poichè si potrebbe supporre, che il piano sia tra le superficie, ciò che la linea retta è fra le linee. La linea retta è la più corta fra due punti dati, parimente il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle, che hanno un medesimo contorno. Nonostante siccome conviene ridurre gli assiomi al più piccolo numero possibile, ecco un ragionamento, che non lascerà verun dubbio su questa proposizione.

Essendo la superficie un estensione in lunghezza ed in larghezza, non si può concepire, che una superficie sia maggiore d'un altra a meno che le dimensioni della prima non superino in qualche senso quelle della seconda; e se accade che le dimensioni d'una superficie siano in ogni senso minori delle dimensioni d'un altra superficie, è chiaro che la prima superficie sarà la minore delle due. Ora in qualunque sen-

so si faccia passare il piano BPD, che taglierà la superficie piana in BD, e l'altra superficie in BPD, la linea retta BD sarà sempre minore di BPD. Dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

348. *Ogni superficie convessa* (Fig. 216) OABCD *è minore d'un altra superficie qualunque, che circondasse la prima appoggiandosi sul medesimo contorno* ABCD.

Ripeteremo qui che intendiamo per *superficie convessa* una superficie, che non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. È per altro possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa; se ne vedono degli esempi nelle superficie del cono e del cilindro. Osserveremo pure che la denominazione di *superficie convessa* non è ristretta alle sole superficie curve; comprende le *superficie poliedre* o composte di più piani, ed anche le superficie in parte curve in parte poliedre.

Ciò posto se la superficie OABCD non è minore di tutte quelle, che la

circondano, sia tra queste PABCD la superficie più piccola, che sarà al più eguale ad OABCD. Per un punto qualunque O fate passare un piano che tocchi la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD, e la parte che ne reciderà sarà maggiore del piano stesso terminato alla medesima superficie. Dunque conservando il resto della superficie PABCD, si potrebbe sostituire il piano alla parte recisa, e si avrebbe una nuova superficie, che circonderebbe sempre la superficie OABCD e che sarebbe minore di PABCD. Ma questa è la minore di tutte per supposizione: dunque questa supposizione non può sussistere. Dunque la superficie convessa OABCD è minore d'ogni altra superficie, che circondasse OABCD, e che fosse terminata al medesimo contorno ABCD.

349. *La solidità d'un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Sia (Fig. 217) CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; rappresentiamo con *sup.* CA la

superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà *sup*. CA×H. Poichè se *sup*. CA×H non è la misura d' un cilindro dato, questo prodotto sarà la misura d' un cilindro maggiore o minore. E prima supponiamo che sia la misura d' un cilindro minore, per esempio del cilindro di cui CD è il raggio della base, ed H l' altezza.

Circoscrivete al circolo il di cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio: immaginate di poi un prisma retto, che abbia per base il poligono GHIP, e per altezza H, il qual prisma sarà circoscritto al cilindro il raggio della di cui base è CD. Posto ciò, la solidità del prisma è eguale alla sua base GHIP moltiplicata per l' altezza H; la base GHIP è minore del circolo di cui CA è il raggio; dunque la solidità del prisma è minore di *sup*. CA×H. Ma *sup*. CA×H è per supposizione la solidità del cilindro inscritto nel prisma; dunque il prisma sarebbe minore del cilindro contenuto nel prisma; il che

è assurdo. Dunque è impossibile, che *sup.* CA×H sia la misura del cilindro la di cui base ha per raggio CD, e la di cui altezza è H, o in termini più generali, *il prodotto della base d' un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore*.

Dico in secondo luogo, che questo stesso prodotto non può misurare un cilindro maggiore. Poichè, per non moltiplicare le figure, sia C D il raggio della base del cilindro dato, e sia se è possibile, *sup.* CD×H la misura d' un cilindro maggiore, per esempio del cilindro la di cui base ha per raggio CA, e la di cui altezza è sempre H.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHIP×H; l' area GHIP è maggiore di *sup.* CD; dunque la solidità del prisma di cui si tratta è maggiore di *sup.* CD×H; il prisma sarebbe dunque maggiore del cilindro della medesima altezza, che ha per base *sup.* CA. Ora all' opposto il prisma è minore del cilindro, poichè v' è contenuto. Dunque è *impossibile, che la base d' un cilindro moltiplicata*

per la sua altezza sia la misura d' un cilindro maggiore.

Dunque finalmente la solidità d' un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

350. *La superficie convessa d' un prisma retto è eguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.*

Poichè questa superficie è eguale alla somma dei rettangoli (Fig. 213) AFGB, BGHC, CHID, ec. di cui è composta; ora le altezze AF, BG, CH, ec. di questi rettangoli sono eguali all' altezza del prisma; le loro basi AB, BC, CD, ec. prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli, o la superficie convessa del prisma è eguale al perimetro della base moltiplicato per la sua altezza.

351. *La superficie convessa del cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.*

Sia (Fig. 217) CA il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza, se si rappresenta con *circ.* CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che *circ.* CA × H sarà la superfi-

cie convessa di questo cilindro. Poichè se ciò si nega, bisognerà che *circ.* CA×H sia la superficie d' un cilindro maggiore o minore; e prima supponiamo che sia la superficie d' un cilindro minore, per esempio del cilindro la di cui base ha per raggio CD, e la di cui altezza è H.

Circoscrivete al circolo il di cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i di cui lati non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio; immaginate di poi un prisma retto, che abbia per altezza H e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà eguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l' altezza H: questo contorno è minore della circonferenza il di cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA×H. Ma *circ.* CA×H è per supposizione la superficie convessa del cilindro la di cui base ha per raggio CD, il qual cilindro è inscritto nel prisma. Dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro inscritto. Ora al contrario dev' essere maggiore; dunque la supposizione da

cui siamo partiti è assurda. Dunque 1.° *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d' un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo, che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie d' un cilindro maggiore. Poichè per non cambiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s' è possibile, *circ.* C D × H la superficie convessa d' un cilindro, che colla medesima altezza avesse una base maggiore, per esempio il circolo il di cui raggio è C A. Si farà la medesima costruzione della prima supposizione, e la superficie convessa del prisma sarà sempre eguale al contorno del poligono G H I P moltiplicato per l' altezza H. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* C D, dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* C D × H, che per supposizione è la superficie del cilindro della medesima altezza la di cui base ha per raggio C A. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma quand' anche il pri-

sma fosse inscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro; molto più essa è minore quando il prisma non arriva fino al cilindro. Dunque la seconda supposizione è assurda quanto la prima. Dunque 2.° *la circonferenza della base d' un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie d' un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la superficie convessa di un cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

352. *La solidità d' un cono è eguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.*

Sia (Fig. 218) S O A il triangolo rettangolo, che colla sua rivoluzione intorno ad S O descrive il cono dato: dico che la solidità di questo cono sarà eguale a *sup.* $AO \times \frac{1}{3}$ SO.

In fatti supponiano 1.° che *sup.* $AO \times \frac{1}{3}$ SO sia la solidità d' un cono maggiore, per esempio del cono della stessa altezza SO che abbia per raggio della sua base OB maggiore di AO.

Al circolo il di cui raggio è AO cir-

coscrivete un poligono regolare MNPT, che non incontri la circonferenza il di cui raggio è O B; immaginate quindi una piramide che abbia per base il poligono, e per sommità il punto S. La solidità di questa piramide è eguale all'area del poligono MNPT moltiplicata per la terza parte dell'altezza S O. Ma il poligono è maggiore del circolo inscritto rappresentato da *sup.* A O; dunque la piramide è maggiore di *sup.* A O $\times \frac{1}{3}$ S O, che per supposizione è la misura del cono di cui S è la sommità, e che ha O B per raggio della base. Ora al contrario la piramide è minore del cono, poichè vi è contenuta. Dunque 1.° è impossibile, che la base d'un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza, sia la misura di un cono maggiore.

Dico 2.°, che questo medesimo prodotto non può essere la misura d'un cono minore. Poichè, per non cambiar figura, sia O B il raggio della base del cono dato, e sia, s'è possibile, *sup.* O B $\times \frac{1}{3}$ S O la solidità del cono che ha per altezza S O, e per *sup.* A O. Si farà la medesima costruzione di so-

pra, e la piramide S M N P ec. avrà per misura il poligono M N P ec. moltiplicato per $\frac{1}{3}$ S O. Ma il poligono è minore di *sup*. O B; dunque la piramide è minore di *sup*. $OB \times \frac{1}{3} SO$, e però minore del cono che ha A O per raggio della base, ed S O per altezza. Ora al contrario la piramide è maggiore del cono, poichè il cono vi è contenuto. Dunque 2.° è impossibile, che la base d' un cono moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura d' un cono minore.

Dunque finalmente la solidità di un cono è eguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

353. *Il cono troncato* A D E B, *di cui* O A, *e* P D *sono i raggi delle basi, e* P O *l' altezza, ha per misura* $\frac{p}{3} OP(\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP)$ (Fig. 219).

Sia T F G H una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la di cui base F G H sia equivalente alla base del cono. Si può supporre, che queste due basi siano situate sopra un medesimo piano; allora le sommità

T ed S saranno a distanze eguali dal piano, ed il piano E P D prolungato farà nella piramide la sezione I K L. Ora io dico, che questa sezione I K L è equivalente alla base DE. Poichè le basi AB, DE stanno fra di loro come i quadrati dei raggi A O, D P, o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli F G H, I K L stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze; dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli F G H, I K L. Ma per supposizione il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo I K L è equivalente al circolo D E.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura del cono S A B, e la base F G H moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO lo è della piramide T F G H; dunque a motivo delle basi equivalenti, la piramide è equivalente al cono. Per una simil ragione la piramide T I K L è equivalente al cono S D E; dunque il tronco di cono A D E B è equivalente al tronco di piramide F H G I K L. Ma la base F G H, equivalente al circolo il di cui raggio è A O ha per misura

$p \times \overline{AO}^2$; parimente la base IKL $= p \times \overline{DP}^2$, e la media proporzionale frà $p \times \overline{AO}^2$, e $p \times \overline{DP}^2$ è $p \times AO \times DP$. Dunque la solidità del tronco di piramide, o sia quella del tronco di cono ha per misura

$$\tfrac{1}{3} OP \times (p \times \overline{AO}^2 + p \times \overline{DP}^2 + p \times AO \times DP)$$

che è lo stesso che

$$\frac{p}{3} \times OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP).$$

354. *La superficie convessa d'un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.*

Sia (Fig. 218) AO il raggio della base del cono dato, S la sua sommità, ed SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$. Poichè sia, se è possibile, *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$ la superficie d'un cono, che avesse per sommità il punto S, e per base il circolo descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivete al circolo minore un poligono regolare, che non arrivi al maggiore, ed immaginate la piramide regolare SMNPQ ec., che avesse per

base il poligono, e per sommità il punto S. Il triangolo SMN uno di quelli che compongono la superficie convessa della piramide, ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell' altezza SA, che è nel tempo stesso il lato del cono dato: essendo eguale quest' altezza in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, ec. ne segue, che la superficie convessa della piramide è eguale al contorno MNPQR ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$ SA. Ma il contorno MNPQR ec. è maggiore del *circ.* AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono, che colla medesima sommità S avesse per base il circolo descritto col raggio OB. Ora al contrario la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide, perchè se si congiunge base con base, la piramide ad una piramide eguale, il cono ad un cono eguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda; dunque

la superficie del cono è maggiore di quella della piramide che vi è compresa. Dalla nostra supposizione nasceva il contrario; dunque questa supposizione non può aver luogo; dunque 1.º la circonferenza della base d' un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d' un cono maggiore.

Dico 2.º che lo stesso prodotto non può misurare la superficie d' un cono minore. Poichè, sia B O il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *circ*. BO × ½ SB la superficie del cono di cui S è la sommità, ed A O minore di O B il raggio della base.

Avendo fatto la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide S M N P ec. sarà sempre eguale al contorno M N P ec. moltiplicato per ½ S A. Ora il contorno M N P ec. è minore di *circ*. B O, S A è minore di S B; dunque per questa doppia ragione la superficie convessa della piramide è minore di *circ*. B O × ½ S B, che per supposizione è la superficie del cono della di cui base il raggio è A O; dunque finalmente la superficie della

piramide sarebbe minore di quella del cono inscritto. Ma al contrario è maggiore; poichè congiungendo base con base, la piramide ad una piramide eguale, il cono ad un cono eguale, la superficie delle due piramidi circonderà quella dei due coni, e per conseguenza sarà la maggiore. Dunque 2.° è impossibile, che la circonferenza della base d' un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie d' un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa d' un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

355. *La superficie convessa del tronco di cono* (Fig. 220) ADEB *è eguale al suo lato* AD, *moltiplicato per la mezza somma delle circonferenze delle sue due basi* AB, DE.

Nel piano SAB, che passa per l' asse SO, conducete perpendicolarmente a SA la linea AF eguale alla circonferenza, che ha per raggio AO: tirate SF, e conducete DH parallela ad AF.

A motivo dei triangoli simili SAO,

S D C, si avrà A O : D C :: S A : S D, ed a cagione dei triangoli simili S A F, S D H, si avrà A F : D H :: S A : S D; dunque AE : DH :: AO : DC, *o* :: *circ.* AO : *circ.* D C. Ma per costruzione AF = *circ.* A O; dunque D H = *circ.* D C. Posto ciò, il triangolo S A F, che ha per misura A F $\times \frac{1}{2}$ S A è eguale alla superficie del cono S A B, che ha per misura *circ.* A O $\times \frac{1}{2}$ S A. Per una simil ragione il triangolo S D H è eguale alla superficie del cono S D E. Dunque la superficie del tronco ADEB è eguale a quella del trapezio ADHF. Questa ha per misura A D $\times \left(\frac{AF + DH}{2}\right)$; dunque la superficie del tronco di cono A D E B è eguale al suo lato A D moltiplicato per la mezza somma delle circonferenze delle sue due basi.

356. *La superficie della sfera è eguale al suo diametro, moltiplicato per la circonferenza d' un circolo grande.*

Dico 1.° che il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d' una sfera maggiore. Poi-

chè sia, se è possibile AB × *circ.* AC la superficie della sfera, che ha per raggio CD (Fig. 221).

Al circolo che ha per raggio CA, circoscrivete un poligono regolare d'un numero pari di lati, che non incontri la circonferenza il di cui raggio è CD; siano M ed S due angoli opposti di questo poligono; ed intorno al diametro MS fate girare il mezzo poligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura MS × *circ.* AC; ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di AB × *circ.* AC, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera il di cui raggio è CD. Ora al contrario la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1.° il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore.

Dico 2.° che questo prodotto non può misurare la superficie d'una sfera minore. Poichè sia, se è possibile,

D E × *circ.* C D la superficie della sfera, che ha per raggio C A. Si farà la medesima costruzione del primo caso, e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre eguale a MS × *circ.* A C. Ma M S è minore di D E, *circ.* A C minore di *circ.* C D; dunque con doppia ragione la superficie del solido prodotto dal poligono è minore di D E × *circ.* C D, e per conseguenza minore della superficie della sfera il di cui raggio è A C. Ora al contrario la superficie descritta dal poligono è maggiore della superficie della sfera descritta col raggio A C, poichè la prima superficie circonda la seconda; dunque 2.° il diametro d' una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo non può essere la misura della superficie d' una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è eguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo gran circolo.

ELEMENTI

Di Trigonometria piana.

1. La *Trigonometria* è un ramo della Geometria, che ha per oggetto particolare *la risoluzione dei triangoli*, cioè l'arte di trovare le relazioni che gli angoli ed i lati d'un triangolo hanno tra di loro.

Ella si divide in due parti: una detta Trigonometria *piana* o *rettilinea*, che considera i triangoli rettilinei; l'altra detta Trigonometria *sferica*, che considera i triangoli sferici, cioè i triangoli formati sopra la superficie d'una sfera, da tre archi di circoli massimi che si tagliano. In questo scritto non parleremo che della prima, essendo tale lo scopo preso di mira in formare questa compilazione.

2. Se fra le sei cose, tre angoli e tre lati, che formano un triangolo rettilineo, ne siano note tre qualunque, la Trigonometria insegna a trovare le tre altre, o *almeno i loro rapporti*: aggiun-

go questa restrizione, perchè se i tre angoli fossero le tre cose cognite, non si potrebbero determinare se non i rapporti dei lati, e non le loro grandezze assolute: e di fatti tutti i triangoli simili [qualunque siano d' altronde le lunghezze dei lati] avendo i tre angoli eguali ciascuno a ciascuno, è chiaro che la cognizione dei tre angoli d' un triangolo non può dare che i rapporti dei lati. Ma se fra le tre cose cognite si trova uno o più lati, si potranno determinare i valori assoluti delle altre tre cose, come lo vedremo più sotto.

3. La Trigonometria, in vece di adoprare nel calcolo gli angoli, di cui gli archi ne sono le misure, adopra certe linee che ne dipendono, e di cui prendiamo a dare le definizioni.

Da un punto C (Fig. 1), come centro, con un raggio CA arbitrario, ma dato, si descriva una circonferenza di circolo; dal medesimo punto s' innalzi sopra il diametro AI il raggio perpendicolare CF; da un punto qualunque B, preso sul quarto di circonferenza ABF, conducasi il raggio BC, a fine

di avere gli angoli ACB, BCF, che sono *complementi* l'uno dell'altro, e gli angoli ACB, BCI, che sono *supplementi* l'uno dell'altro; dal medesimo punto B si abbassino le perpendicolari BD, BH, sopra i raggi CA, CF; dai punti A ed F s'innalzino perpendicolarmente ai medesimi raggi, le rette AE, FG, che incontrino in E e G il raggio CB prolungato. Ciò posto si chiama

BD *seno*		BH *seno*	
AD *seno verso*		FH *seno verso*	
CD o BH *coseno*, cioè, *seno del complemento*		CH o BD *coseno*, cioè, *seno del complemento*	
AE *tangente*	Dell'arco AB, o dell'angolo ACB.	FG *tangente*	Dell'arco FB, o dell'angolo FCB.
FG *cotangente*, cioè, *tangente del complemento*		AE *cotangente*, cioè, *tangente del complemento*	
CE *secante*		CG *secante*	
CG *cosecante*, cioè *secante del complemento*		CE *cosecante*, cioè *secante del complemento*	

Quindi il seno d'un arco è la perpendicolare abbassata da una delle estremità di quest'arco sopra il raggio che passa per l'altra estremità; il coseno, o il seno del complemento, è la parte del raggio, compresa dopo il centro sino al seno; ec.

4. Egli è chiaro, dalle definizioni precedenti, 1.° che due archi AB, BFI, supplementi l'uno dell'altro, hanno il medesimo seno BD.

2.° Che il seno d'un arco qualunque è la metà della corda dell'arco doppio; percioecchè, se si prolunga BD sino in K, il raggio CA che è perpendicolare alla corda BK, divide questa corda e l'arco BAK o BIK, ciascuno in due parti eguali.

3.° Se a ciascuno degli archi AB, BFI, si aggiunga la circonferenza intera o un multiplo della circonferenza, il seno rimarrà ancora lo stesso per l'una e l'altra somma; poichè, facendo partire dal punto B la circonferenza o il multiplo della circonferenza, che si aggiunge, l'altra estremità viene necessariamente a cadere sopra il medesimo punto B.

4.° Un arco AFIN, maggiore della semicirconferenza, ha egualmente per seno la perpendicolare NP, abbassata dalla sua estremità N sopra il raggio IC, prolungato, che passa per l'altra estremità A. Ma supponendo che si riguardino come quantità positive i se-

ni BD, FC, *bd* di tutti gli archi AB, AF, AF*b*, che sono situati sopra il diametro AI, bisognerà riguardare il seno NP che cade al di sotto, e che è per conseguenza situato in verso contrario, come una quantità negativa. Imperciocchè, in generale le quantità negative devono essere prese in senso contrario delle quantità positive.

5.° I due archi AB, BFI, supplementi l' uno dell' altro, hanno dei coseni eguali, ma posti in versi contrarj. Di fatti, se si prenda l' arco AF*b* eguale all' arco BFI, e si conduca *bd* perpendicolare ad AI, le due linee CD, C*d*, che sono evidentemente uguali, e poste in versi contrarj per rapporto al centro C, esprimeranno, l' una il coseno dell' arco AB, l' altra il coseno dell' arco AF*b* o dell' arco BFI. Quindi, riguardando CD come una quantità positiva, bisognerà riguardare C*d* come una quantità negativa.

6.° Se dal punto I conducasi una tangente all' arco BFI, ella non potrà mai incontrare il raggio CB, comunque si prolunghi nel verso CB; ma se

si prolunghi nel verso opposto CL, la tangente IM incontrerà questo prolungamento in M. Allora le linee IM, CM, che sono situate in versi contrarj alle linee AE, CE, esprimono, l'una la tangente, l'altra la secante dell'angolo ottuso BCI. E siccome si ha evidentemente IM = AE, CM = CE, si vede che un angolo ottuso ha per tangente, la tangente del suo supplemento, presa negativamente, e per secante, la secante del suo supplemento, presa altresì negativamente.

7.° Prendendo [come sopra n.° 5] l'arco AF*b* = all'arco BFI, e guidando la tangente F*g* dell'arco F*b*, questa tangente che è la cotangente dell'arco AF*b* o dell'arco BFI, supplemento dell'arco AB, è eguale e contraria alla cotangente FG dell'arco AB. Quindi un arco ed il suo supplemento hanno delle cotangenti eguali, ma di segni contrarj.

8.° Il seno d'un arco zero è zero, ed il suo coseno è il raggio; il seno d'un arco di 90 è il raggio, ed il suo coseno è zero; il seno d'un arco di 180 è zero, ed il suo coseno è il rag-

gio preso negativamente. Tutti i seni e coseni sono compresi fra questi due limiti, zero ed il raggio preso positivamente o negativamente. Il raggio si chiama qualche volta *seno totale*. Quanto alle tangenti ed alle secanti, esse aumentano dopo zero sino all' infinito positivo o negativo.

Si sono costruite per l' uso dei calcoli trigonometrici, delle tavole che contengono i valori delle linee BD, CD, AE, ec., in parti del raggio, coi loro logaritmi. Eccone i principj.

Costruzione delle tavole trigonometriche.

5. Problema I. *Trovare i seni ed i coseni d' una serie di archi che formano una progressione geometrica decrescente, la cui ragione è 2?*

1.° Abbiamo veduto che conoscendo in generale il lato AB (Fig. 2) d' un poligono regolare, cioè il valore di AB per rapporto al raggio, si avrà l' apotema CM, col sottrarre dal quadrato del raggio il quadrato della metà AM di AB, e con cavare la radice quadrata dal residuo. Ora AM è il seno

dell'angolo O C A o dell'arco O *u* A, e C M ne è il coseno. Quindi, conoscendo il seno d'un arco O *u* A, si può determinare il coseno.

2.° Per mezzo della corda A B, che è il doppio del seno dell'arco A *u* O, si può determinare la corda A O d'un arco che è soltanto la metà dell'arco A O B; dunque si conoscerà eziandio la metà della corda A O, o sia il seno d'un angolo che non è che la metà dell'angolo O C A; e per mezzo di questo seno, si calcolerà il coseno, come si è spiegato; così di seguito.

Supponiamo, per esempio, che l'arco primitivo A O B sia di 60 gradi, cioè la sesta parte della circonferenza: allora la corda A B è eguale al raggio, come si è veduto; e per conseguenza il seno d'un angolo O C A di 30 gradi, è la metà del raggio, si calcolerà il coseno pel numero primo del presente articolo. Conoscendo così il seno ed il coseno d'un arco di 30 gradi, si potrà determinare il seno ed il coseno dell'arco suddupło, cioè a dire, dell'arco di 15°; per mezzo del seno e del coseno di quest' ultimo arco, si calco-

lerà il seno ed il coseno dell'arco sudduplo, cioè a dire, dell'arco di $7^{\circ}\ 30'$; e così di seguito.

6. Conoscendo il seno, e per conseguenza anche il coseno d'un arco AB (Fig. 1), si potrà determinare il seno verso, la tangente, la secante, ec. Imperciocchè primieramente si avrà il seno verso, sottraendo dal raggio il coseno. Le altre linee AE, CE, ec. si trovano colle proporzioni seguenti che danno i triangoli simili, ed in ciascuna delle quali sono noti i tre primi termini. Chiamo R il raggio, A l'arco AB, che è preso per arco principale; e metto a canto di ciascuna proporzione, la sua traduzione in linguaggio trigonometrico.

$$CD:BD::CA:AE\{\cos.A:\text{sen}.A::R:\quad \text{tang}.A=\frac{R\ \text{sen}.\ A}{\cos.\ A}$$

$$CD:CA::CB:CE\{\cos.A:\quad R::R:\quad \sec.A=\frac{R^2}{\cos.\ A}$$

$$\begin{matrix}BD\\CH\end{matrix}\Big\}:BH::CF:FG\Big\{\text{sen}.A:\cos.A::R:\text{cotang}.A=\frac{R\ \cos.\ A}{\text{sen}.\ A}$$

$$\begin{matrix}BD\\CH\end{matrix}\Big\}:CF::CB:CG\Big\{\text{sen}.A:\quad R::R:\quad \text{cosec}.A=\frac{R_2}{\text{sen}.\ A}$$

7. Le tangenti di due archi differenti A e B, stanno fra loro in ragione

inversa delle cotangenti degli archi medesimi; perciocchè tang. A × cotang. A = R^2, e similmente tang. B × cotang. B = R^2; dunque tang. A × cotang. A = tang. B × cotang. B: il che dà tang. A : tang. B :: cotang. B : cotang. A.

8. PROBLEMA II. *Essendo dati i seni* BD, EF *di due archi* AB, BE (Fig. 3): *trovare i seni ed i coseni della somma e della differenza degli archi medesimi.*

Prolungo EF sino in G: il che dà FG = EF, arc. BG = arc. BE, e per conseguenza arc. AG = arc. AB − arc. BE; conduco perpendicolarmente al raggio CA, le rette EL, FM, GH: e parallelamente allo stesso raggio, le rette FI, GK. Egli è chiaro che IK = EI ed FI o sia OK = OG = MH = ML: nella stessa maniera FG = FE. Da un altro canto [chiamando R il raggio, A l'arco AB, B l'arco BE], si ha EL = sen. (A + B), CL = cos. (A + B), GH = sen. (A − B), CH = cos. (A − B).

Ciò posto, i triangoli BDC, EIF, che hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno, e che sono per conseguenza simili, danno queste porporzioni:

$CB(R) : CD(\cos. A) :: EF(\text{sen}. B) : EI = \frac{\cos. A \text{ sen}. B}{R}$,

$CB(R) : BD(\text{sen}. A) :: EF(\text{sen}. B) : FI = \frac{\text{sen}. A \text{ sen}. B}{R}$,

I triangoli simili CBD, CFM danno

$CB(R) : BD(\text{sen}. A) :: CF(\cos. B) : FM = \frac{\text{sen}. A \cos. B}{R}$

$CB(R) : CD(\cos. A) :: CF(\cos. B) : CM = \frac{\cos. A \cos. B}{R}$;

Ora $EL = IL + EI = FM + EI$; $CL = CM - ML = CM - FI$; $GH = KL = IL - KI = FM - EI$; $CH = CM + HM = CM + FI$; dunque . . . . .

$$\text{sen}. (A + B) = \frac{\text{sen}. A \cos. B + \cos. A \text{ sen}. B}{R},$$

$$\cos. (A + B) = \frac{\cos. A \cos. B - \text{sen}. A \text{ sen}. B}{R},$$

$$\text{sen}. (A - B) = \frac{\text{sen}. A \cos. B - \cos. A \text{ sen}. B}{R},$$

$$\cos. (A - B) = \frac{\cos. A \cos. B + \text{sen}. A \text{ sen}. B}{R},$$

9. Quando $B = A$, cioè a dire, quando gli archi proposti sono eguali, si ha

$$\text{sen}. 2A = \frac{2 \text{ sen}. A \cos. A}{R},$$

$$\cos. 2A = \frac{(\cos. A)^2 - (\text{sen}. A)^2}{R}.$$

10. Siccome si ha in generale $(BD)^2 + (CD)^2 = (CB)^2$, cioè a dire, $(\text{sen. A})^2 + (\text{cos. A})^2 = R^2$, o $(\text{sen. A})^2 = R^2 - (\text{cos. A})^2$; e che, in virtù dell' articolo precedente, $(\text{cos. A})^2 = R \text{ cos. } 2A + (\text{sen. A})^2$: si avrà $2 (\text{sen. A})^2 = R^2 - R \text{. cos. } 2A$; cioè a dire, che *il doppio del quadrato del seno d' un angolo è eguale al quadrato del raggio, meno il prodotto del raggio nel coseno dell' angolo doppio.*

11. I due problemi precedenti bastano per costruire le tavole trigonometriche. Di fatti, abbiamo veduto, che partendo dall' arco 30 gradi, il cui seno è eguale alla metà del raggio, si possono calcolare i seni di tutti gli archi compresi nella progressione geometrica decrescente

$$\div\!\div 30 : \frac{30^\circ}{2} : \frac{30^\circ}{4} : \frac{30^\circ}{8} : \frac{30^\circ}{16} : \text{ec.}$$

Prendiamo in questa progressione un arco picciolissimo; e per fissare le idee, supponiamo, per esempio, che questo piccolo arco sia $1''$. Conoscendo il seno di quest' arco, potremo trovare i seni, coseni, tangenti, ec. di tutti gli archi compresi nella progressione aritmetica crescente $\div 1''. 2''. 3''. 4''. 5''.$ ec.:

progressione che si può continuare sino a 90°, ove corrisponde il massimo di tutti i seni, che è il raggio. Egli è dunque evidente che si avranno, in parti del raggio, i seni, coseni, tangenti, ec. di tutti gli archi dopo 1″ sino a 90°.

Supponiamo, per esempio, che il raggio sia rappresentato dal numero 100000; il seno di 23° 30′ sarà rappresentato da 39875; la sua tangente da 43481; la sua secante da 109044; ec.

Il raggio ed i seni, coseni, tangenti, ec. essendo così espressi per mezzo dei numeri che si riferiscono ad una stessa unità, potremo determinare i logaritmi di questi numeri, coi principj che sono stati dati nell' Algebra. Quindi abbiamo tutti i *dati* necessarj per costruire delle tavole che contengano i seni, coseni, tangenti, ec., coi logaritmi che loro corrispondono. Vi sono dei mezzi per abbreviare considerabilmente nella pratica, i calcoli di queste tavole; ma noi non ispiegheremo qui queste abbreviazioni; ci basta che si veda la possibilità di costruire le tavole di cui si tratta.

I primi Matematici che intrapresero di calcolare queste sorti di tavole, supposero che il raggio fosse rappresentato da 10000000000, cioè a dire, dall' unità seguita da 10 zeri. In conseguenza, il logaritmo del raggio aveva 10 per caratteristica. Ma in seguito, si sono soppressi alcuni zeri nel valore del raggio, e si è nondimeno conservata sempre la medesima caratteristica al suo logaritmo. Per esempio, nelle tavole che Bouguer ha date nel suo *Trattato di Navigazione*, il raggio è espresso semplicemente da 100000, e gli si attribuisce un logaritmo che ha 10 per caratteristica. Ma ciò non ha alcun inconveniente, perchè le caratteristiche dei logaritmi di tutti i seni, coseni, tangenti, ec. vi sono relative alla caratteristica del logaritmo del raggio o seno totale.

Nella maggior parte delle tavole, non si trovano le secanti e le cosecanti, nè i loro logaritmi. Noi vedremo di fatti che queste linee sono inutili per la risoluzione completa dei triangoli.

Risoluzione dei triangoli rettangoli.

12. Risolvere un triangolo, è trovare gli angoli o i lati di questo triangolo, che possono essere incogniti. Ora per mezzo delle tavole trigonometriche, si conoscono gli angoli dai valori de' loro seni, coseni, tangenti, ec. Qui adunque non si tratta che di stabilire i principj da cui dipendono le relazioni fra i lati d'un triangolo, ed i seni, coseni, tangenti, ec. de' suoi angoli.

13. *In ogni triangolo rettangolo* ABC (Fig. 4), *l'ipotenusa* AC *sta ad uno dei lati* AB, *come il raggio al seno dell'angolo* C *opposto al lato* AB.

Imperciocchè, suppongo che CF rappresenti il raggio, ed abbassando la perpendicolare FE sopra CB prolungato, i triangoli rettangoli simili (*) ABC, FEC danno AC : AB :: FC (R) : FE (sen. C).

14. *In ogni triangolo rettangolo* ABC,

(*) Denotando un triangolo rettangolo con tre lettere, suppongo sempre che quella di mezzo corrisponda all'angolo retto.

un lato CB *sta all' altro lato* AB, *come il raggio alla tangente dell' angolo opposto al secondo lato*.

Imperciocchè sia CF o CH il raggio, ed HK la tangente dell'arco HF, o dell' angolo C: i triangoli simili CBA, CHK danno CB : AB :: CH (R) : HK (tang. C).

15. *In ogni triangolo rettilineo* ABC (Fig. 5), *i seni di due angoli stanno fra loro come i lati opposti a questi angoli; cioè si ha, per esempio*, sen. B : sen. C :: AC : AB.

Sia presa, per raggio, la retta CF eguale ad AB; e siano abbassate, dai punti F ed A, le perpendicolari FE, AD, sopra CB: egli è chiaro che AD sarà il seno dell' angolo B, ed FE il seno dell' angolo C. Ora i triangoli simili CDA, CEF danno AD (sen. B) : FE (sen. C) :: AC : FC o AB.

16. *In ogni triangolo rettilineo* ABC (Fig. 6), *si ha questa proporzione: la somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma dei due angoli opposti a questi lati, sta alla tangente della loro semidifferenza; cioè si ha, per esempio*,

$BC+BA : BC-BA :: \text{tang.} \frac{A+C}{2} : \text{tang.} \frac{A-C}{2}$.

Dal punto B, come centro, col minore B A dei due lati proposti, descrivasi una circonferenza di circolo; si prolunghi C B verso E, e si conducano le corde AE, AD; in fine sia condotta la retta D F, parallela ad E A. Egli è chiaro, che le rette E A, D F sono perpendicolari a DA, poichè l'angolo E A D è retto. I triangoli simili CEA, CDF danno CE : CD :: EA : DF: proporzione che racchiude l'enunciato del Teorema. Di fatti, 1.° CE=BC+BA, e CD=BC—BA: 2.° L'angolo E D A non avendo per misura che la metà dell'arco A X E, è la metà dell'angolo E B A che ha per misura quest' arco intero. Ora l'angolo E B A vale la somma dei due angoli BAC, BCA; dunque, prendendo A D per raggio o per seno totale, A E è la tangente di $\frac{A+C}{2}$. 3.° Ang. CAD = ang. BAC — ang. BAD = ang. BAC — ang. BDA. Ora ang. BDA = ang. CAD + ang. BCA; dunque ang. CAD = ang. BAC — ang. CAD

— ang. BCA; il che dà 2 ang. CAD = ang. BAC — ang. BCA, o sia ang. CAD

$= \frac{\text{ang. BAC} - \text{ang. BCA}}{2}$; quindi prendendo ancora AD per seno totale, DF

è la tangente di $\frac{A-C}{2}$. Dunque finalmente la proporzione CE : CD :: EA : DF, si può tradurre così, $BC + BA : BC - BA :: \text{tang.}\ \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\ \frac{A-C}{2}$.

17. Dunque, se nel triangolo ABC si conoscano i lati BC, AB, e l'angolo compreso B, si potranno determinare gli angoli A e C. Imperciocchè la somma dei tre angoli A, B, C del triangolo ABC vale 180°; quindi, sottraendo l'angolo B da 180°, si conoscerà A + C, e per conseguenza anche $\frac{A+C}{2}$. In seguito, per mezzo della proporzione, $BC + BA : BC - BA :: \text{tang.}\ \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\ \frac{A-C}{2}$ } nella quale

i tre primi termini sono cogniti; si troverà tang. $\frac{A-C}{2}$, e per conseguenza $\frac{A-C}{2}$. Ora il maggiore A dei due angoli A e C [il quale è opposto al maggiore dei due lati dati] vale $\frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}$, cioè la metà della loro somma, più la metà della loro differenza; ed il minore C vale $\frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}$, cioè la metà della loro somma, meno la metà della loro differenza; quindi si conoscerà in particolare ciascuno degli angoli A e C.

18. *In ogni triangolo rettilineo si ha questa proporzione: il prodotto di due lati sta alla radice quadrata d' un prodotto di quattro dimensioni, risultante dalla moltiplica della semisomma dei tre lati pei tre eccessi di questa semisomma sopra ciascuno dei lati, come il doppio del raggio sta al seno dell' an*

golo compreso fra i due lati, il cui prodotto compone il primo termine della proporzione.

Da un angolo A del triangolo A B C (Fig. 7, e 8) abbassate la perpendicolare A O sul lato opposto, prolungato, se è necessario. Il triangolo rettangolo A O C darà A C : A O :: R : sen. A C O o sen. A C B. Dunque questo seno

$$= \frac{A O \times R}{A C}.$$ Cerchiamo la perpendicolare A O per mezzo dei lati del triangolo.

Si è trovato C O = ...

$$\frac{\pm (AB)^2 \mp (AC)^2 \mp (BC)^2}{2 B C}$$; ed il triangolo rettangolo A O C dà $(AO)^2 = (AC)^2 - (CO)^2$. Ora, in generale, la differenza di due quadrati M^2 ed N^2, cioè a dire, $M^2 - N^2 = (M + N) \times (M - N)$. Quindi $(A O)^2 = (A C + C O) \times (A C - C O)$. Sostituendo, in vece di C O, il suo valore, si avrà . . . .

$$(AO)^2 = \left(AC \frac{\pm (AB)^2 \mp (AC)^2 \mp (BC)^2}{2 B C}\right) \times$$

$$\left(AC \frac{\mp (AB)^2 \pm (AC)^2 \pm (BC)^2}{2 B C}\right),$$ ovvero

$(AO)^2 \times 4(BC)^2 = [AC \times 2BC \pm (AB)^2 \mp (AC)^2 \mp (BC)^2] \times [(AC \times 2BC) \mp (AB)^2 \pm (AC)^2 \pm (BC)^2]$. Ora, prendendo primieramente i segni superiori, si vede che il primo fattore $AC \times 2BC + (AB)^2 - (AC)^2 - (BC)^2 = (AB)^2 - (AC - BC)^2 = (AB + AC - BC) \times (AB - AC + BC)$; e che il secondo fattore $AC \times 2BC - (AB)^2 + (AC)^2 + (BC)^2 = (AC + BC)^2 - (AB)^2 = (AC + BC + AB) \times (AC + BC - AB)$. Medesimamente, prendendo i segni inferiori, si vede che il primo fattore $AC \times 2BC - (AB)^2 + (AC)^2 + (BC)^2 = (AC + BC)^2 - (AB)^2 = (AC + BC + AB) \times (AC + BC - AB)$; e che il secondo fattore $AC \times 2BC + (AB)^2 - (AC)^2 - (BC)^2 = (AB)^2 - (AC - BC)^2 = (AB + AC - BC) \times (AB - AC + BC)$. Per conseguenza, si ha nell' uno e nell' altro caso, $(AO)^2 \times 4(BC)^2 = (AB + AC + BC) \times (AB + AC - BC) \times (AB + BC - AC) \times (AC + BC - AB)$; ovvero $(AO)^2 \times (BC)^2 = \ldots\ldots$

$$4\left(\frac{AB + AC + BC}{2}\right) \times \left(\frac{AB + AC - BC}{2}\right) \times \left(\frac{AC + BC - AC}{2}\right) \times \left(\frac{AC + BC - AB}{2}\right).$$

Laonde si ricava (chiamando S la semisomma dei tre lati, ed osservando che

$$\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{AB+AC+BC}{2}-BC,$$ che

$$\frac{AB+BC-AC}{2}=\frac{AB+BC+AC}{2}-AC,$$ che

$$\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{AC+BC+AB}{2}-AB\Big)\ AO$$

$$=\frac{2\sqrt{[S\times(S-BC)\times(S-AC)\times(S-AB)]}}{BC}.$$

Sostituendo questo valore di A O nell' equazione sen. A C O o sia sen. $ACB=\frac{AO\times R}{AC}$, si avrà per l' espressione del seno di cui trattasi, ...

$$\frac{2R\times\sqrt{[S\times(S-BC)\times(S-AC)\times(S-AB)]}}{BC\times AC}.$$

Donde risulta la proporzione che forma l' enunciato del Teorema.

19. Siccome un angolo acuto ed il suo supplemento hanno il medesimo seno, possiamo essere incerti, se l' espressione che abbiamo trovata, sia quella del seno dell' angolo ottuso ACB (Fig. 7),

o quella dell'angolo acuto ACB (Fig. 8). Ma ci leveremo da quest' incertezza, osservando, che se un triangolo è nel caso di avere un angolo ottuso, quest' angolo è necessariamente quello che è opposto al lato maggiore, e che gli altri due angoli saranno acuti. Donde risulta questa regola. *Cercate colla formola precedente, i seni dei due angoli opposti ai due lati minori del triangolo; questi due angoli sono acuti. Sottraete la loro somma da 180°: il residuo sarà l' angolo opposto al lato maggiore; e quest' angolo sarà acuto o ottuso, secondo che il residuo della sottrazione sarà minore o maggiore di 90 gradi.*

20. A norma di questi principj, andiamo a presentare in un quadro succinto, la risoluzione dei triangoli rettilinei per tutti i casi possibili. La cosa incognita è sempre uno dei termini d' una proporzione, nella quale i tre altri sono cogniti; e conseguentemente essa pure sarà cognita.

Tavola I.

Risoluzione dei triang. rettang. (Fig. 9)

CASI	DATI	TROVARE	SOLUZIONE
1	L' ipotenusa A C e gli angoli.	Un lato A B	R : sen. C :: A C : A B
2	L' ipotenusa A C ed un lato A B	Gli angoli	A C : A B :: R : sen. C; A = 90° − C.
3	L' ipotenusa A C ed un lato A B	L' altro lato BC	Cercate gli angoli pel secondo caso : ed in seguito il lato B C pel primo.
4	Gli angoli ed un lato A B	L' ipotenusa AC	Sen. C : R :: AB : AC.
5	Gli angoli ed un lato B C	L' altro lato AB	R : tang. C :: BC : AB
6	I due lati AB e BC	Gli angoli	AB : BC :: R : tang. A; C = 90° − A.
7	I due lati AB e BC	L' ipotenusa AC	Cercate gli angoli pel sesto; ed in seguito l' ipotenusa pel quarto.

TAVOLA II.

Risol. dei triang. obliquang. (Fig. 10, 11).

CASI	DATI	TROVARE	SOLUZIONE
1	Gli angoli C e B, ed un lato AB	Ciascuno degli altri lati AC, BC	Sen. C : sen. B :: AB : AC; $A = 180° - B - C$; sen. C : sen. A :: AB : BC.
2	I due lati AB, AC, e l'angolo B opposto ad uno di essi	Gli angoli C ed A	AC : AB :: sen. B : sen. C; $A = 180° - B - C$.
3	I due lati AB, AC, e l'angolo B opposto ad AC	L'altro lato BC	Cercate prima gli angoli (caso precedente); ed allora avrete sen.C:sen.A::AB:BC.
4	I due lati AB, AC, e l'angolo compreso A	Gli angoli C e B	AB + AC : AB − AC :: tang. $\frac{B+C}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$. Si conoscerà dunque C e B.
5	I due lati AB, AC, e l'angolo compreso A	L'altro lato BC	Cercate gli angoli pel caso precedente; ed in seguito cercate BC pel primo caso.
6	I tre lati	Gli angoli	Cercate gli angoli per l'articolo 19.

21. Il 2.° ed il 3.° caso dei triangoli obliquangoli hanno due soluzioni, quando il lato A C, opposto all' angolo dato B, è minore dell' altro lato dato A B; perciocchè se dal punto A, come centro, si descriva l' arco $C x C'$, si vedrà che l' angolo A C C' o A C' C ed il suo supplemento avendo il medesimo seno; i *dati* sono i medesimi pei due triangoli A B C, A B C'. Questi due triangoli non ne formano che uno solo, quando l' angolo cercato è retto. L' angolo dato B non può essere maggiore dell' angolo A B x, formato dal lato B A, e dalla tangente B x dell' arco C x C'.

Se essendo sempre dati i lati AB, AC, fosse dato di *specie* l' angolo C, opposto al maggiore A B di questi lati, non vi sarebbe che una soluzione: ve ne sarebbero due, se si conoscesse semplicemente sen. C.

Applicazioni ad alcuni esempi.

Esempio I. *Trovare l' altezza* P S *d' una torre verticale* (Fig. 12) *a cui si possa accostare?*

Prendo sul terreno, supposto orizzon-

talè, contando dal piede P della torre, una retta PC di lunghezza arbitraria, ma data, per esempio, di 64 tese; al punto C, misuro coll' istromento detto *grafometro*, posto verticalmente, l' angolo PCS; sia quest' angolo di 38° 51'. Ho dunque così un triangolo rettangolo PCS, che mi dà [caso 5.° dei triangoli rettangoli] R : tang. 38° 51' :: CP : PS.

Operando coi logaritmi, si avrà:			
	Log. tang. 38° 51'	=	9,9060431
	log. 64	=	1,8061800
			11,7122231
	log. R	=	10,0000000
	log. PS	=	1,7122231

Dunque PS = 51^tes. 3^pi. 3^po., a un di presso.

Esempio II. *Trovare l' altezza d' una torre verticale* PS (Fig. 13), *al piede della quale non si possa accostare?*

Prendo sul terreno orizzontale una base CA che sia nella dirittura della torre [il che si fà situando la palina A, di maniera che il raggio visuale diretto da A verso C, vada ad incontrare la retta SP]; misuro col grafometro posto verticalmente, gli angoli SCA, SAC. Siano CA = 36 tese;

ang. SCA=115° 12′; ang. SAC=28° 43′, e per conseguenza ang. ASC = 36° 5′. Ciò posto, 1.° si avrà [cas. 1 dei triangoli obliquangoli] sen. 36° 5′ : sen. 28° 43′ :: 36 tese : CS.

Operando coi logaritmi, si avrà:			
Log.	sen. 28° 43′	=	9,681674
	log. 36	=	1,556303
	somma		11,237977
log.	sen. 36° 5′	=	9,770088
	log. CS	=	1,467890

2.° L'angolo SCP, supplemento di SCA, essendo di 64° 48′, si ha [caso 1 dei triangoli rettangoli] R : sen. 64° 48′ :: CS : SP.

Operando coi logaritmi, si avrà:			
Log.	sen. 64° 48′	=	9,956566
	log. CS	=	1,467890
	somma	=	11,424456
	log. R	=	10,000000
	log. PS	=	1,424456

Dunque PS = 26$^{\text{tese}}$, 574, ad un di presso.

Esempio III. *Trovare la distanza da un punto* B *ad un oggetto* S, *a cui non si possa accostare* (Fig. 14)?

Misuro sul terreno una base BA; dirigo dalle sue estremità, verso un medesimo punto S dell' oggetto proposto, i raggi visuali BS, AS; e misuro, per

mezzo del grafometro, gli angoli SBA, SAB; il che mi fa conoscere l'angolo ASB. In seguito trovo BS colla proporzione, sen. S : sen. A :: BA : BS.

Siano, per esempio, BA = 192 tese; A = 87° 28'; B = 82° 53', e per conseguenza S = 9° 39'. Si troverà BS = 1144 tese circa.

Esempio IV. *Trovare la distanza* CD (Fig. 15) *di due oggetti C e D inaccessibili?*

Prendete sul terreno una base BA, dalle estremità della quale possiate vedere i due oggetti C e D; misurate col grafometro gli angoli CBD, CBA, DBA, CAB, BAD [il che comprende il caso in cui i quattro punti C, D, B, A non fossero in un medesimo piano]. Ciò posto, 1.° nel triangolo CBA, si conoscono il lato BA, gli angoli B ed A, e per conseguenza anche l'angolo C: si troverà BC colla proporzione, sen. C : sen. A :: AB : BC. 2.° Nel triangolo BAD si conosce BA, e gli angoli B ed A, e per conseguenza anche l'angolo D: si troverà BD colla proporzione, sen. D : sen. A :: BA : BD. 3.° Nel triangolo CBD, si conoscono

BC, BD, e l'angolo compreso B; si troveranno gli angoli C e D, ed il lato CD, pei casi 4.° e 5.° dei triangoli obliquangoli.

Supponiamo, per esempio, che i punti C, D, B, A siano in un medesimo piano, e che siasi trovato BA=42 tese; ang. CBD = 17° 8'; CBA = 55° 39'; e conseguentemente DBA = 38° 31'. In seguito, CAB=48° 29', BAD=72° 10'. Si troverà BC=32^tes., 429; BD=42^tes., 736; CD = 15^tes., 308.

Esempio V. *Trovare sotto qual angolo un occhio situato al punto dato* A (Fig. 16), *veda la facciata data* CD *d'una fabbrica*.

Egli è chiaro, che la questione riducesi a trovare gli angoli d'un triangolo ACD, di cui sono noti i tre lati; problema che si riferisce al caso 6.° dei triangoli obliquangoli.

Siano, per esempio, CD = 100 tese, CA = 150 tese, AD = 200 tese; si troverà l'angolo A = 28° 57', ad un di presso.

	Errori	Correzioni
Pag. 4 lin. 7	dei studj	di studj
31 lin. 7	$a - 36$	$a - 3b$
145 lin. 3	$u = 29$	$x = 29$
150 lin. 5	$\frac{a'M - 1}{b} . N = E'$	$\frac{a'M - 1}{b} . N' = E,$
173 lin. 15	$s = (a - u) \frac{n}{2}$	$s = (a + u) \frac{n}{2}$
256 lin. 3	$x + 3x = 108$	$x^2 + 3x = 108$

Geometria Tav. I.ª

Geometria Tav. II.
E D N F
36
A R C O M B
A
43
B O C
49
Quadrato
50
Traperio
63
B
H h
F f
K e
E d
D a
C
A

69
A
D
E
B
C
O
G
H
K
I
75
B
C
D
E
A
E
83
K
C
A
84
D
E
F
G
H
I
B
C
S
90
Z
C
n
p
q
A
B
M
N
P
V
Q
Z
D
E

Geometria Tav. IV.

103

a e d o b c

E D

A O M N P 111 B D C

K

112

M B C K H

C B K B K H

L D C 133 O E H B M A z F

B M D

G F E D c

141

153

159

158

161

163

173

184

193

203

204

205

207

208

F
R
Q
I
Z
S
X
Y
H
G
21
D
A
K
P
O
L
C
M
N
B
20
H
M
F
X
A
F
B
C
6
7
S
B
C
A
B

67
68
69
74
75
81
82
83
89
90
91